

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE PUBLICATION

JOURNAL OF TECHNOLOGY



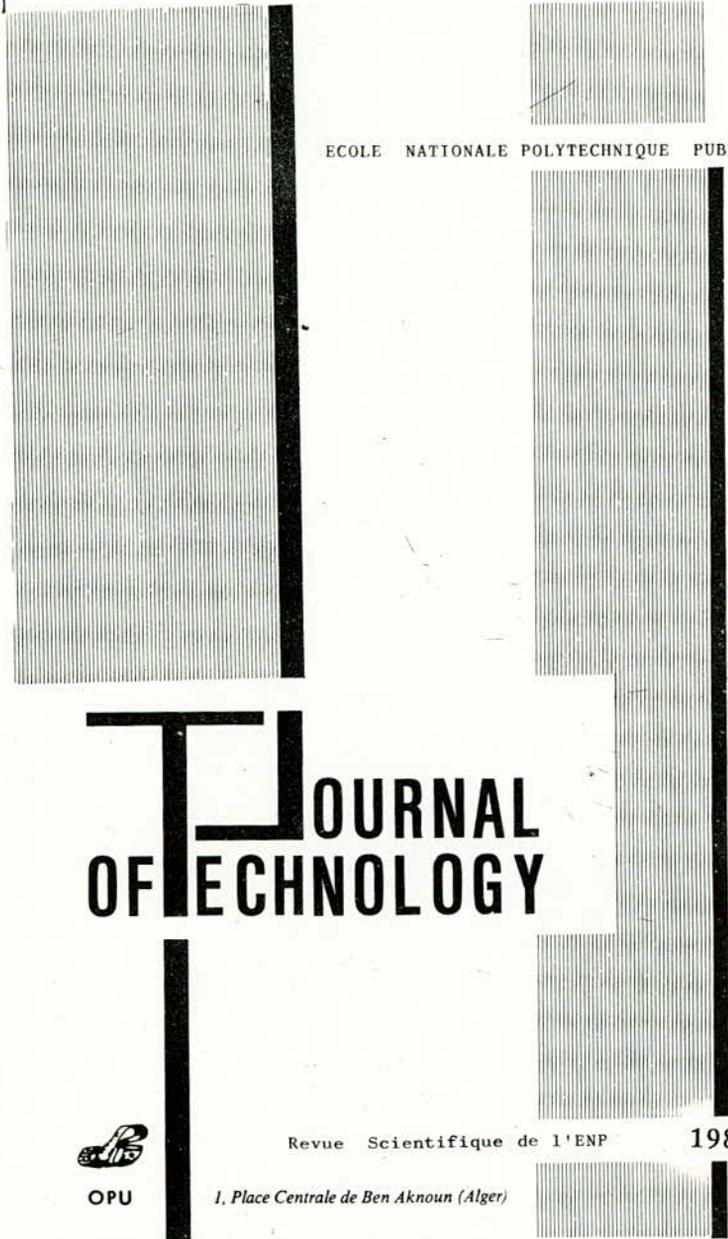
OPU

Revue Scientifique de l'ENP

1988

N°6

1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE PUBLICATION

**JOURNAL
OF TECHNOLOGY**



OPU

Revue Scientifique de l'ENP

1988 N° 6

1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)

© OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES : 02—89

Codification : 4.02.3191

TABLE DES MATIERES

	PAGES
I - ENERGY GAP AND LATTICE PARAMETER OF SUBSTITUTIONALLY DISORDRED BINARY ALLOYS BY THE COHERENT POTENTIAL APPROXIMATION P M NDIAYE G COHEN SOLEL M M KAVE	1
II - DISPERSION DU DEPLACEMENT DE VITESSE ET D'ACCCELERATION DES POINTS DE FIXATION DU MOTEUR M BOULAHIA KSIAZEK M , TAHI A	14
III - DIMENSIONNEMENT DES BIELLES DES MOTEURS THERMIQUES A COMBUSTION INTERNE M BOUKABACHE , B CHOUCHAOUI	30
IV - VOLANT REGULATEUR DE VITESSE M BOUKABACHE , B CHOUCHAOUI	43
V - DIMENSIONNEMENT DES PISTONS DE MOTEURS A COMBUSTION INTERNE M BOUKABACHE , B CHOUCHAOUI	57
VI - ETUDE COMPARATIVE DE TROIS(O3) COMMANDES REVERSIBLES DES MOTEURS A COURANT CONTINUE M MAAZI R TAHMI	77
VII - SYSTEME M/G1/1 AVEC RAPPELS ET SERVEUR NON FIABLE M AISSANI A	98
VIII - SYSTEME D'ACQUISITION ET DE TRAITEMENT DE DONNEES ELECTROCHIMIQUES Mme BEDDEK MALIKA FLAMANT YVES	125

Energy gap and lattice parameter of substitutionally disordered binary alloys by the coherent potential approximation.

P.M. Ndiaye , G.W. Cohen-Solal , M.M. Kane

Abstract

Using the coherent potential approximation (CPA), we developed a method to calculate the energy gap and the lattice parameter of a binary alloy of any concentration. Then we applied successfully our results to alloys $Cd_{1-x}Zn_xS$ and $Cd_xHg_{1-x}Te$.

Résumé

A partir de l'approximation du potentiel cohérent, nous avons initié une méthode pour calculer la largeur de bande interdite et le paramètre de réseau d'un alliage binaire semiconducteur, quelle que soit la composition. Puis, nous avons appliqué avec succès nos résultats théoriques aux systèmes $Cd_{1-x}Zn_xS$ et $Cd_xHg_{1-x}Te$.

I Introduction

The coherent potential approximation (CPA) is a single site approximation in which the real medium is replaced by an effective one. The "effective atoms" are located on a periodic point lattice. This effective medium is characterized by a non hermitian hamiltonian having complex eigenvalues whose imaginary part is related to the lifetimes of the single electron states. Introduced by P. Soven [1], the CPA was then developed by B. Velicky & al [2] within the framework of the alloy average density of states. From this approximation, we developed a theory which gives fairly generally the gap and lattice parameter of substitutionally disordered binary alloys of any concentration [3]

II Theory

The one-electron hamiltonian corresponding to a given configuration is denoted by H and the corresponding resolvent operator may be defined by the equation:

$$G(z) = \frac{1}{z - H} \quad (1)$$

where Z is a complex variable. $G(Z)$ depends on configuration like hamiltonian H . The quantity of interest is usually the configuration averaged resolvent operator

$$\langle G(z) \rangle = \left\langle \frac{1}{z - H} \right\rangle = \frac{1}{z - H_{\text{eff}}} \quad (2)$$

$\langle G(Z) \rangle$ in contrast to $G(Z)$ has the full symmetry of the empty lattice. It contains all the informations necessary to calculate the averaged properties of the alloy. The effective hamiltonian characterizes the average crystal, it has the full crystal symmetry, but is non hermitian and energy-dependent [2]

Now consider $K = K(Z)$ as the starting approximation of H_{eff}

$$\langle G(z) \rangle = \frac{1}{(z-K) - (H_{\text{eff}} - K)} = \frac{1}{z-K} + \frac{H_{\text{eff}} - K}{(z-K)(z - H_{\text{eff}})}$$

$$\langle G(z) \rangle = R(z) + R(z) (H_{\text{eff}} - K) \langle G(z) \rangle \quad (3)$$

Here , $R(z) = (z - K)^{-1}$

If we consider that K is the unperturbed part of H_{eff} (independent-configuration part) then $R(z)$ appears like the corresponding resolvent operator.

In the multiple-scattering theory, the T -matrix is defined by:

$$G = R + RTR$$

On averaging, the relation becomes

$$\langle G \rangle = R + R \langle T \rangle R \quad (4)$$

Relations (3) and (4) lead to:

$$H_{\text{eff}} = K + \langle T \rangle [1 + R \langle T \rangle]^{-1} \quad (5)$$

If we decompose the random-perturbing potential $H - K$ into sum of contributions of single scatters associated with each site n , i.e

$$H - K = \sum_n V_n \quad (6)$$

relation (5) can be rewritten as

$$H_{\text{eff}} = K + \sum_n \langle t_n \rangle [1 + R \langle t_n \rangle]^{-1} \quad (7)$$

The validity of this relation depends on the neglect of the statistical correlations between n and all the other sites $m \neq n$

t_n is the T-matrix associated with site n . It characterizes the strength of an isolated scatterer [2]

$$t_n = V_n (1 - R V_n)^{-1} \quad (8)$$

Consider now a single band model, where the hamiltonian

$$H = H_p + H_R$$

In the Wannier representation

$$H_R = \sum_n |n\rangle V_n \langle n|$$

$$H_p = \sum_{n, m \neq n} |n\rangle h_{nm} \langle m|$$

We decompose H into a diagonal part H_R and an off-diagonal part H_p with respect to the Wannier representation. The diagonal elements V_n may be regarded as atomic levels which assume one of two possible values V_A and V_B depending on whether an atom A or B occupies site n . The hopping integrals h_{nm} are taken to be independent of the alloy composition.

Let

$$V_0 = c V_B + (1-c) V_A$$

c and $1-c$ are respectively the concentrations of compounds B and

A. In the Bloch representation:

$$H_P \cdot \Psi(\vec{k}, \vec{z}) = \varepsilon(\vec{k}) \Psi(\vec{k}, \vec{z})$$

$\Psi(\vec{k}, \vec{z})$ are the Bloch eigenstates associated with a given configuration.

In the CPA [3,4]

$$R(z) = \frac{1}{z - H_P - \Sigma(z)} \quad (9)$$

$\Sigma(z)$ is the self energy of the alloy. It doesn't depend on k but only on z . It is a complex quantity. The effect of Σ corresponds in (8) to a shift of the energy [4]:

$$t_m = [V_m - \Sigma(z)] / \left\{ 1 - F(z) [V_m - \Sigma(z)] \right\} \quad (10)$$

where $F(z)$ is the diagonal matrix element of R

$$F(z) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k [z - \varepsilon(\vec{k}) - \Sigma(z)]^{-1}$$

Ω - crystal volume

If t_A and t_B are respectively the T-matrix associated with sites A and B, then

$$\langle t_m \rangle = c t_B + (1-c) t_A \quad (11)$$

with

$$t_B = \frac{V_B - \Sigma}{1 - F(V_B - \Sigma)} \quad ; \quad t_A = \frac{V_A - \Sigma}{1 - F(V_A - \Sigma)}$$

The coherent condition $\langle t_m \rangle = 0$ yields :

$$\Sigma = V_0 - F(V_B - \Sigma)(V_A - \Sigma) \quad (12)$$

If we write that

$$\Sigma = V_0 + f(z) \quad ; \quad \Delta = V_B - V_A$$

we find

$$V_B - \Sigma = (1-c)\Delta - f \quad \text{and} \quad V_A - \Sigma = -c\Delta - f$$

If $G_0(E)$ is the density of states corresponding to $\mathcal{E}(\vec{k})$

$$G_0(E') = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta[E' - \mathcal{E}(\vec{k})]$$

$$F(z) = \int \frac{G_0(E') dE'}{z - \Sigma(z) - E'}$$

Suppose now that $f(z)$ have a pole at a point Z , Σ have also singularity at the same point Z .

Then

$$\Sigma \Big|_Z \longrightarrow +\infty$$

We obtain

$$\frac{1}{z - \Sigma(z) - E'} = \frac{1}{z - \Sigma} + \frac{E'}{(z - \Sigma)^2} + \dots \approx \frac{1}{z - \Sigma}$$

$$F(z) \approx (z - \Sigma)^{-1} \int dE' G_0(E') = (z - \Sigma)^{-1}$$

Then, relation (12) yields

$$f = \frac{c(1-c)\Delta^2}{Z - [V_0 + (1-2c)\Delta]}$$

and

$$\Sigma = V_0 + \frac{c(1-c)\Delta^2}{Z - [V_0 + (1-2c)\Delta]} \quad (13)$$

III Calculation of energy gap and lattice parameter

Relation (9) is analytic in the entire complex Z plane except for singularities at energies E

$$E = \mathcal{E}(\vec{k}) + \Sigma(E)$$

which yields to the expression

$$E - \mathcal{E}(\vec{k}) - V_0 - \frac{A}{E - E_0} = 0, \quad E \neq E_0 \quad (14)$$

$$\text{with } A = c(1-c)\Delta^2 \quad ; \quad E_0 = V_0 + (1-2c)\Delta$$

$$E^2 - (E + V_0 + E_0)E - A + E_0(E + V_0) = 0$$

$$\mathcal{D} = (E + V_0 + E_0)^2 + 4A - 4E_0(E + V_0) = (E + V_0 - E_0)^2 + 4A \geq 0$$

$$E = \frac{1}{2} \left\{ E + E_0 + V_0 + \left[(E + V_0 - E_0)^2 + 4A \right]^{1/2} \right\}$$

$$E(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon(\vec{k}) + E_0 + V_0 + [\varepsilon(\vec{k}) + V_0 - E_0] \left[1 + \frac{4A}{[\varepsilon(\vec{k}) + V_0 - E_0]^2} \right]^{1/2} \right\}$$

If the two compounds are not very different, Δ is not so large, then:

$$A = c(1-c)\Delta^2 \ll |\varepsilon(\vec{k}) + V_0 - E_0|^2$$

$$E(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon(\vec{k}) + E_0 + V_0 + [\varepsilon(\vec{k}) + V_0 - E_0] \left[1 + \frac{2A}{[\varepsilon(\vec{k}) + V_0 - E_0]^2} \right] \right\}$$

In that case, the solution of equation (14) is

$$E(\vec{k}) = \varepsilon(\vec{k}) + cV_B + (1-c)V_A + \frac{c(1-c)\Delta^2}{\varepsilon(\vec{k}) + (2c-1)\Delta}$$

$$E_A = \varepsilon + V_A \quad (c = 0)$$

$$E_B = \varepsilon + V_B \quad (c = 1)$$

Then

$$\bar{E} = cE_B + (1-c)\bar{E}_A + \frac{c(1-c)\Delta^2}{cE_B + (1-c)E_A} \quad (15)$$

We consider next a two bands model. we suppose E_c to be the lowest level of the higher band (conduction band) and E_v the highest level of the lower band (valence band). Then relation (15) yields [5]

The gap E_g is given by $E_c - E_v$

Let

$$E_{BC} - E_{BV} = E_{gB}$$

$$E_{AC} - E_{AV} = E_{gA}$$

Then

$$\bar{E} = \bar{E}_g - \frac{c(1-c)\Delta^2 \bar{E}_g}{[cE_{BC} + (1-c)E_{AC}][cE_{BV} + (1-c)E_{AV}]} \quad (16)$$

with

$$\bar{E}_g = cE_{gB} + (1-c)E_{gA}$$

\bar{E}_g is the linear part of gap dependency on composition
The use of simplified model for cubic lattice yields [5]

$$E_g \sim \frac{1}{a^2} \quad \text{at point } \Gamma \quad (k=0)$$

Where a is the lattice parameter
Then, from relation (16)

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \left[1 - \frac{c(1-c)\Delta^2}{[cE_{BC} + (1-c)E_{AC}][cE_{BV} + (1-c)E_{AV}]} \right]$$

with

$$\frac{1}{a^2} = \frac{c}{a_B^2} + \frac{1-c}{a_A^2}$$

a_A and a_B - the lattice parameters of pure crystals A and B
 \bar{a} is the lattice parameter of "virtual" crystal whose gap is \bar{E}_g

We obtain

$$a^2 \approx \bar{a}^2 \left[1 + \frac{c(1-c)\Delta^2}{[cE_{Bc} + (1-c)E_{Ac}][cE_{Bv} + (1-c)E_{Av}]} \right]$$

or

$$a \approx \bar{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{c(1-c)\Delta^2}{[cE_{Bc} + (1-c)E_{Ac}][cE_{Bv} + (1-c)E_{Av}]} \right]$$

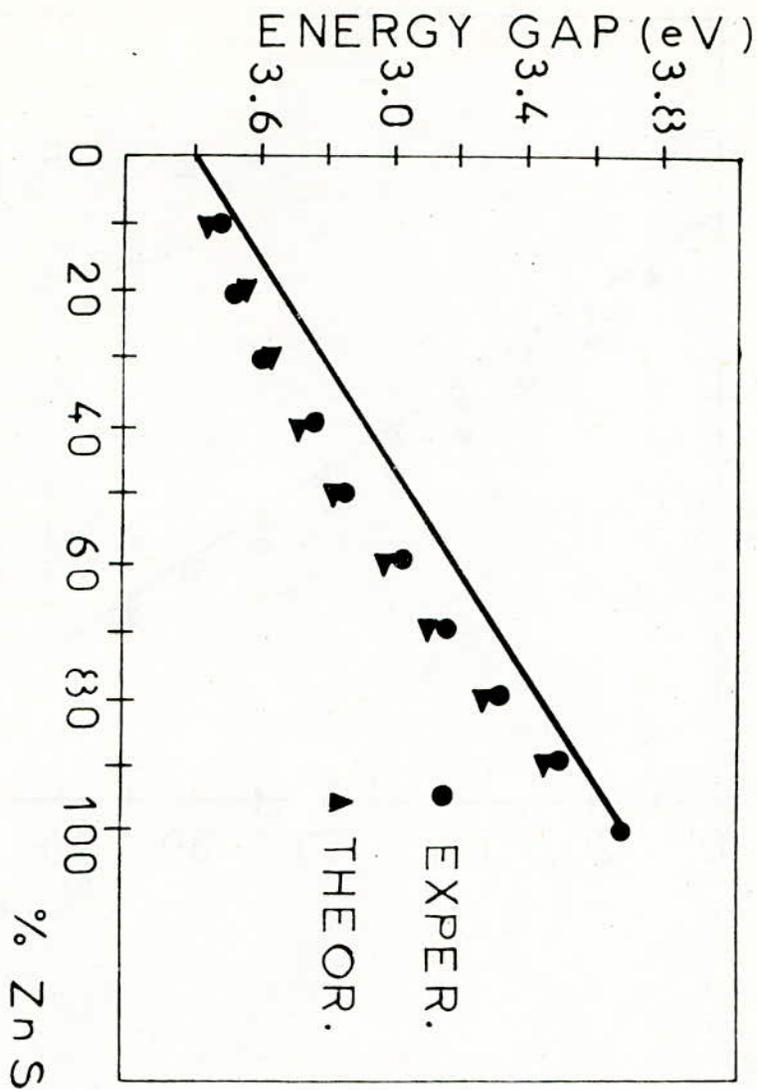
The results are given in Fig. 1, 2 and 3.
 We have evaluated the parameter Δ from experimental data. These figures show a good concordance between our calculations and experience [3,6]

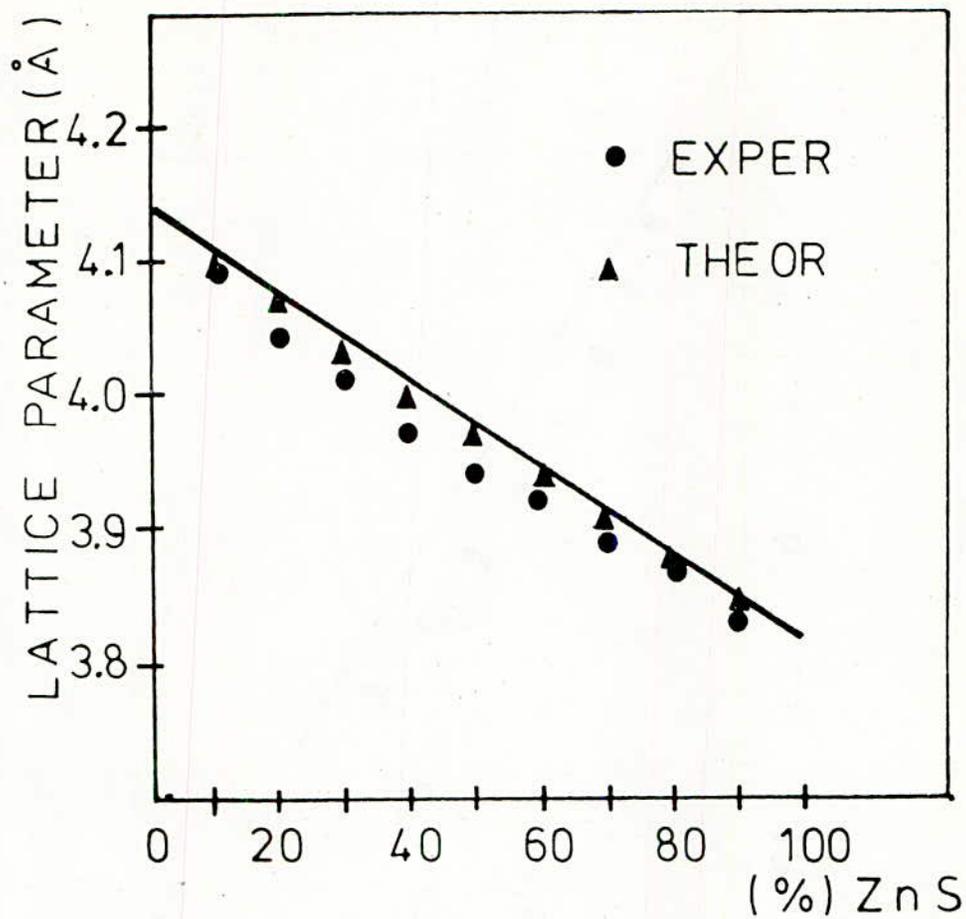
References

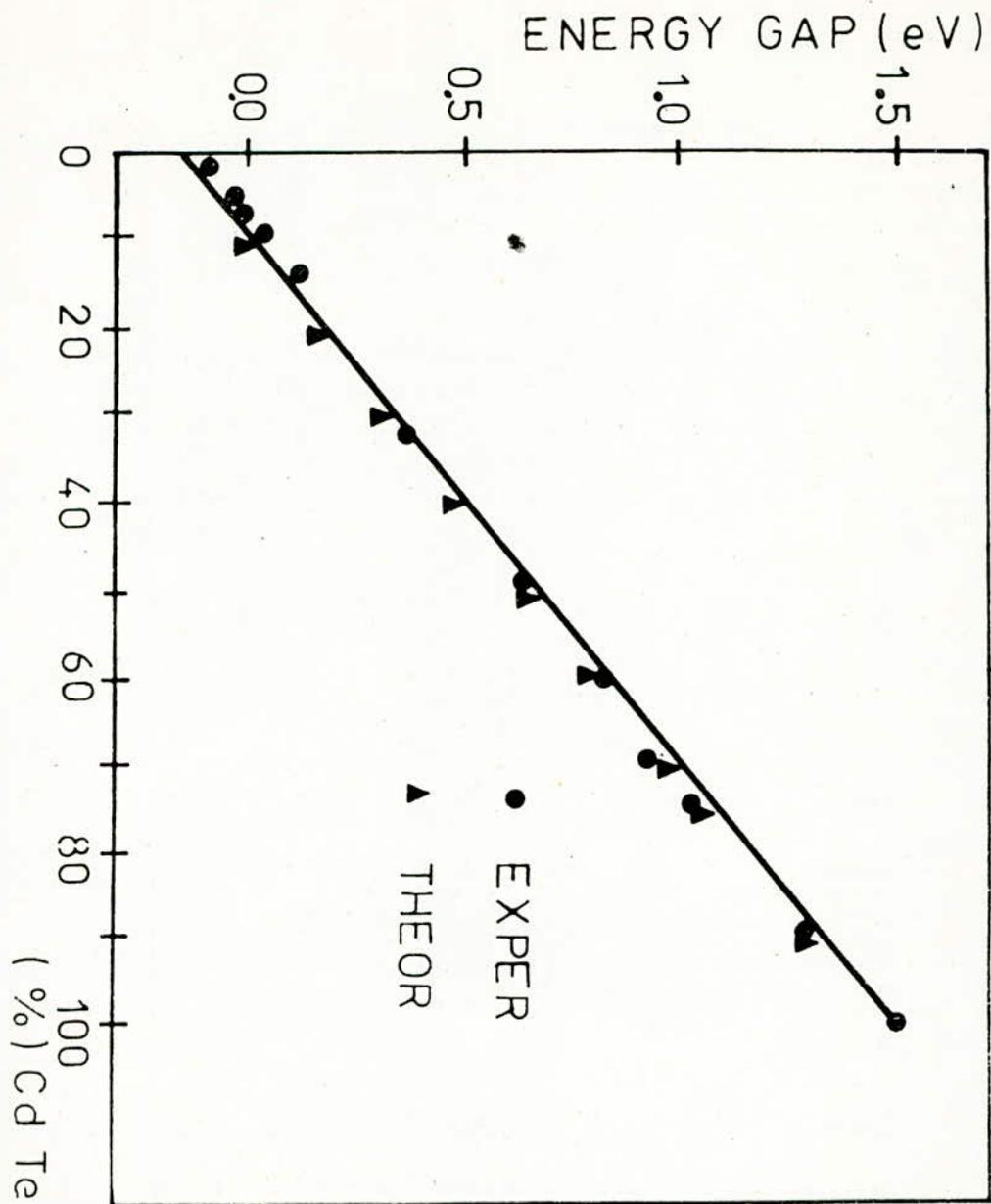
- [1]-P. Soven, Phys. Rev., 156, 809 (1967)
- [2]-B. Velicky, S. Kirkpatrick, and H. Ehrenreich, Phys. Rev., 175, 747, (1968)
- [3]-P.M. Ndiaye, Thèse de Doctorat de troisième cycle, Dakar 1984
- [4]-J. Callaway, Quantum theory of the Solid State, Academic Press New-York 1974.
- [5]-P. Baranski, V. Klotchkov, I. Potykévitch, Electronique des semiconducteurs, Ed. MIR, Moscou 1978.
- [6]-G. Cohen-Solal, Thèse de Docteur de l'Université, Paris 1967
- C.M.M'Bow, Thèse de Doctorat de troisième cycle, Dakar 1980
- G. Weill, Thèse de Docteur-ingénieur, Paris 1976
- S. Otmezguine, Thèse d'Etat, Paris 1975

FIGURES CAPTION

- Fig 1 Variation of energy gap with composition for $Cd_{1-x}Zn_xS$.
- Fig 2 Variation of lattice parameter with composition for $Cd_{1-x}Zn_xS$.
- Fig 3 Variation of energy gap with composition for $Cd_xHg_{1-x}Te$.







ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Dép: Génie mécanique

Laboratoire de Mécanique
du Solide

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
دائرة : الهندسة الميكانيكية
مخبر ميكانيك الأجسام الملبية

BOULAHIA.R ; KSIAZEK.M ; TAHI.A

الموضوع : توزيع الانتقالات و التسارعات لنقط ارتكاز المحرك.
الملخص: ان مشروعنا يتمثل في حساب توزيعات الانتقالات و التسارعات
لنقط ارتكاز المحرك و طبقت هذه الدراسة على المحرك
F4L912 للشاحنة K66 (العادية) من صنع : ش.و.ع.ص.
برويبية، تحت تحريضات شكل الطريق.

Sujet: Dispersions du déplacement, de vitesse et
d'accélération des points de fixation du moteur

Résumé: Il s'agit du calcul des dispersions de
déplacement, de vitesse et d'accélération des points de
fixation du moteur. L'application de cette étude a été faite
sur le moteur F4L912 du véhicule k66 (Normal) produit par
SNVI de Rouiba, sous l'effet des excitations du microprofil
de la route.

Subject: Dispersions of the displacement, of the velocity and
of acceleration of fixation points of the engine.

Abstract: This study consists in calculation of the
dispersions of displacement, of velocity and of acceleration
of fixation points of the engine F4L912 of truck K66 (Normal)
made by SNVI Ruiba under excitation in the origine of the
microprofil of the road.

I-INTRODUCTION

Les études du comportement vibratoire des véhicules routiers ont été présentées, sous différents aspects, dans les positions bibliographiques /1/, /2/, /3/, /7/, /8/.

La présente étude a pour but de calculer les dispersions de déplacement de vitesse et d'accélération des points de fixation du moteur d'un véhicule sous l'effet des excitations externes dues aux irrégularités de la surface de la route. Ce moteur est supposé monté sur quatre suspensions élastiques.

Cette étude nous permet de voir l'influence des paramètres des plots de fixation sur ces dispersions.

L'étude permet en plus, de calculer les dispersions de déplacement et d'accélération pour n'importe quel point du véhicule. Il suffit pour cela d'exprimer ces dispersion en fonction de coordonnées généralisées appropriées. Elle peut donc être utilisée, comme il a été fait dans /8/, dans l'étude du confort et de la sécurité des marchandises transportées dans le véhicule.

La méthode utilisée consiste à corrélérer les caractéristiques probabilistiques de sortie en fonction des caractéristiques de l'entrée pour divers paramètres du système (Raideur, Amortissement, etc..).

II- ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT "MODELE PHYSIQUE"

II.1-Critères de modélisation

Les critères de modélisation, sont les suivants:

- Le véhicule est décomposé en quatre masses vibrantes liées élastiquement (modèle discret) Fig(2.1).

Où

- M1: Masse du châssis-cabine.
- M2: Masse de l'essieu avant.
- M3: Masse de l'essieu arrière.
- M4: Masse de l'ensemble moteur-boîte de vitesse.

- Chacune des masses représente un ensemble rigide.

- On ne considère que les degrés de liberté qui sont en relation avec l'excitation considérée comme stationnaire et normale.

- On suppose que la structure considérée ainsi que ses paramètres ne dépendent pas du temps.

II.2- Le modèle

Les critères de modélisation ci-dessus nous conduisent au modèle des figures(2.1), (2.2) et (2.3).

La Fig(2.1) représente une vue longitudinale du véhicule.

Les Fig(2.2) et (2.3) représentent le véhicule par devant et par derrière.

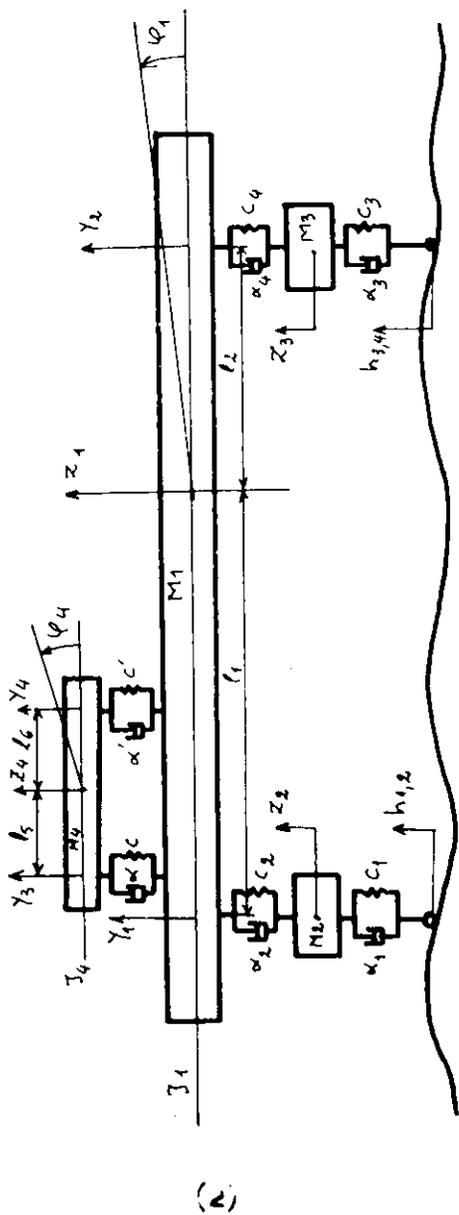


Fig. (2.1) The integrated finite element

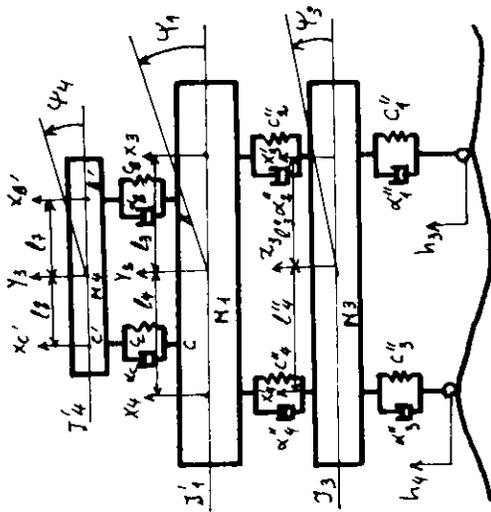


FIG. (2.3). • • • • •

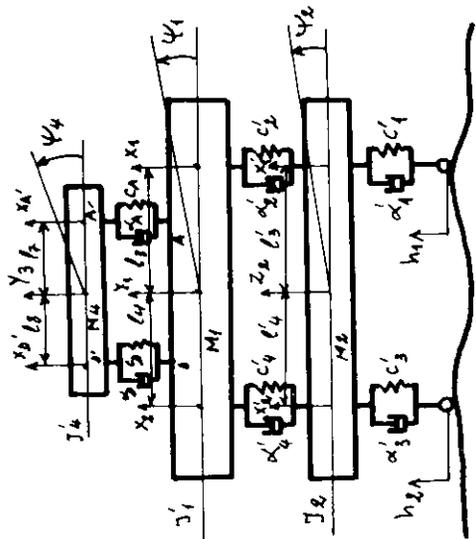


FIG. (2.2). • • • • •

• • • • •

• • • • •

(5)

II.3- Relations géométriques entre les coordonnées

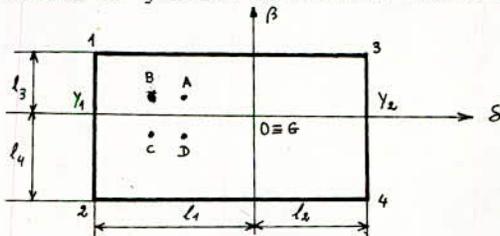
A partir des figures (2.1), (2.2) et (2.3) on obtient les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_1 - l_1 \varphi_1 + l_3 \varphi_3 & x'_1 &= z_2 + l'_3 \varphi_2 & x'_A &= z_4 - l'_5 \varphi_4 + l'_2 \varphi_3 \\
 x_2 &= z_1 - l_1 \varphi_1 - l_4 \varphi_2 & x'_2 &= z_2 - l'_4 \varphi_2 & x'_B &= z_4 + l'_6 \varphi_4 + l'_2 \varphi_3 \\
 x_3 &= z_1 + l_2 \varphi_1 + l_3 \varphi_3 & x'_3 &= z_3 + l'_3 \varphi_3 & x'_C &= z_4 + l'_6 \varphi_4 - l'_8 \varphi_4 \\
 x_4 &= z_1 + l_2 \varphi_1 - l_4 \varphi_2 & x'_4 &= z_3 - l'_4 \varphi_2 & x'_D &= z_4 - l'_5 \varphi_4 - l'_8 \varphi_4
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

En assumant que les quatre points de fixation du moteur A, B, C et D appartiennent au plan du châssis, on obtient:

$$\begin{aligned}
 x_A &= z_1 + \delta_A \varphi_1 + \beta_A \varphi_3 & x_C &= z_1 + \delta_C \varphi_1 + \beta_C \varphi_3 \\
 x_B &= z_1 + \delta_B \varphi_1 + \beta_B \varphi_3 & x_D &= z_1 + \delta_D \varphi_1 + \beta_D \varphi_3
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où (δ, β) représente les coordonnées du point considéré dans le repère $(0, \delta, \beta)$.
Avec 0: Centre de gravité du châssis cabine.



Fig(2.4)

II.4- Equations différentielles du mouvement et leurs solutions

Pour établir ces équations, nous avons utilisé les équations de Lagrange de seconde espèce:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.3)$$

L'énergie cinétique T est:

$$\begin{aligned}
 T &= \left(\frac{1}{2} M_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J'_1 \dot{\varphi}_1^2 \right) + \left(\frac{1}{2} M_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) \\
 &+ \left(\frac{1}{2} M_3 \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 \right) + \left(\frac{1}{2} M_4 \dot{z}_4^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} J'_4 \dot{\varphi}_4^2 \right)
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'énergie potentielle V est:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} C'_1 (x'_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} C'_2 (x'_1 - x'_1)^2 + \frac{1}{2} C'_3 (x'_2 - h_2)^2 + \frac{1}{2} C'_4 (x_2 - x'_2)^2 + \\
 &\frac{1}{2} C''_1 (x'_3 - h_3)^2 + \frac{1}{2} C''_2 (x_3 - x'_3)^2 + \frac{1}{2} C''_3 (x'_4 - h_4)^2 + \frac{1}{2} C''_4 (x_4 - x'_4)^2 + \\
 &\frac{1}{2} C_A (x'_A - x_A)^2 + \frac{1}{2} C_B (x'_B - x_B)^2 + \frac{1}{2} C_C (x'_C - x_C)^2 + \frac{1}{2} C_D (x'_D - x_D)^2
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

La fonction de dissipation de Rayleigh est:

$$D = \frac{1}{2} \alpha_1' (\dot{x}_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2' (\dot{x}_1 - \dot{x}_1')^2 + \frac{1}{2} \alpha_3' (\dot{x}_2' - h_2)^2 + \frac{1}{2} c_4' (x_2 - x_2')^2 + \frac{1}{2} c_4'' (x_3 - h_3)^2 + \frac{1}{2} c_5'' (x_3 - x_3')^2 + \frac{1}{2} c_3'' (x_4' - h_4)^2 + \frac{1}{2} c_4'' (x_4 - x_4')^2 + \frac{1}{2} c_A (x_A' - x_A)^2 + \frac{1}{2} c_B (x_B' - x_B)^2 + \frac{1}{2} c_C (x_C' - x_C)^2 + \frac{1}{2} c_D (x_D' - x_D)^2 \quad (2.6)$$

En exprimant, V et D en fonction des variables indépendantes et tenant compte des relations géométriques (2.1) et (2.2), on obtient le système d'équations différentielles du mouvement.

$$\text{Posons: } q_1 = x_1; \quad q_2 = q_1; \quad q_3 = q_1; \quad q_4 = x_2; \quad q_5 = q_2; \\ q_6 = x_3; \quad q_7 = q_3; \quad q_8 = x_4; \quad q_9 = q_4; \quad q_{10} = q_4 \quad (2.7)$$

Où $q_i (i=1, 10)$ sont les coordonnées généralisées.

L'application de la transformée de Laplace nous permet d'écrire le système sous la forme matricielle [4], [6] suivante.

$$A \bar{q} = b_1 \bar{h}_1 + b_2 \bar{h}_2 \quad (2.8)$$

$$\text{Avec: } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ 1 \leq j \leq 10}} \quad \bar{q} = (\bar{q}_i)_{1 \leq i \leq 10} \\ b_1 = (b_{i1})_{1 \leq i \leq 10} \quad b_2 = (b_{i2})_{1 \leq i \leq 10}$$

Remarque: L'indice barre exprime la transformée de Laplace de la fonction du temps correspondante.

Le système $A \bar{q} = b_1 \bar{h}_1 + b_2 \bar{h}_2$, étant linéaire, sa solution peut être décomposée en la somme de deux termes respectivement solutions des équations $A \bar{q} = b_1 \bar{h}_1$, et $A \bar{q} = b_2 \bar{h}_2$.

Comme on s'intéresse particulièrement aux fonctions de transfert, on cherchera donc la solution des deux systèmes:

$$A \left(\frac{\bar{q}}{\bar{h}_1} \right) = b_1 \quad \text{et} \quad A \left(\frac{\bar{q}}{\bar{h}_2} \right) = b_2 \\ \text{Où } \frac{\bar{q}}{\bar{h}_1} = \bar{H}_1 = (\bar{H}_{i1})_{1 \leq i \leq 10} \\ \frac{\bar{q}}{\bar{h}_2} = \bar{H}_2 = (\bar{H}_{i2})_{1 \leq i \leq 10} \quad (2.9)$$

Sont les fonctions de transfert. Les deux systèmes d'équations deviennent:

$$A \bar{H}_1 = b_1 \quad \text{et} \quad A \bar{H}_2 = b_2$$

Les matrices A, b_1 et b_2 ont déjà été définies. Les coefficients a_{ij} , b_{i1} et b_{i2} se trouvent dans [9].

III. CALCUL DES DENSITES SPECTRALES ET DES DISPERSIONS

III.1- Fonctions de transfert

A partir des relations géométriques entre les coordonnées et vu la linéarité de ces expressions, on peut trouver les fonctions de transfert de chaque point considéré. Pour cela il suffit de remplacer dans chacune des expressions \bar{q}_i par $(\bar{H}_{i1} \cdot h_1 + \bar{H}_{i2} \cdot h_2)$. Pour les mouvements relatifs, il suffit de faire la différence des coordonnées des points considérés. En remplaçant la variable complexe de la transformée de Laplace par $(j\omega)$, on trouve les fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel.

III.2- Densités spectrales de sortie

Connaissant les fonctions de transfert, on peut trouver les densités spectrales de sortie de déplacement, de vitesse et d'accélération des points considérés /4/, /6/, S_{x_k} , $S_{\dot{x}_k}$ et $S_{\ddot{x}_k}$ respectivement.

-1er cas: $h_1 = h_2$

(L'indice k est lié au déplacement x du point considéré)

$$S_{x_k}(\omega) = |w_{k1}(j\omega) + w_{k2}(j\omega)|^2 \cdot S_{h_1}(\omega) \quad (3.1)$$

Où: $S_{h_1}(\omega)$ est la densité spectrale d'entrée.

-2ème cas: $h_1 \neq h_2$

$$S_{x_k}(\omega) = |w_{k1}(j\omega)|^2 \cdot S_{h_1}(\omega) + |w_{k2}(j\omega)|^2 \cdot S_{h_2}(\omega) \quad (3.2)$$

Où: $S_{h_1}(\omega)$ et $S_{h_2}(\omega)$ sont les densités spectrales d'entrée.

La densité spectrale de vitesse est:

$$S_{\dot{x}_k}(\omega) = \omega^2 S_{x_k}(\omega) \quad (3.3)$$

La densité spectrale d'accélération est:

$$S_{\ddot{x}_k}(\omega) = \omega^4 S_{x_k}(\omega) \quad (3.4)$$

III.3- Calcul des dispersions

Les dispersions de déplacement, de vitesse et d'accélération des points considérés sont données par les formules/6/:

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_k}(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\dot{x}_k}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{x}_k}(\omega) d\omega \quad (3.6)$$

III.4- Densité spectrale du microprofil de la route

Le microprofil de la route est une fonction aléatoire du chemin parcouru. Chaque portion de la route comporte des irrégularités d'étendue et de forme différentes. La succession des saillies et des creux est tout à fait aléatoire.

Les conditions remplies par cette fonction sont, d'après [3]/[4]:

- 1) La fonction aléatoire est stationnaire et ergodique.
- 2) Les irrégularités sont limitées, elles ne prennent pas des valeurs trop grandes par rapport à la moyenne.
- 3) Les ordonnées du microprofil sont distribuées suivant la loi normale en fonction du temps.

Il existe plusieurs manières d'approximer les fonctions d'autocorrélation et densité spectrale énergétique du microprofil de la route.

Dans [1], on a montré qu'un microprofil peut être décrit, avec une bonne approximation, par une fonction d'autocorrélation de la forme:

$$K_h(\tau) = \sigma_h^2 A_1 e^{-\gamma_1 V |\tau|} + \sigma_h^2 A_2 e^{-\gamma_2 V |\tau|} \cos \beta_4 \tau \quad (3.7)$$

$$A_1 + A_2 = 1$$

Où: σ_h^2 est la variance du microprofil.

V est la vitesse du véhicule.

$\gamma_1, \gamma_2, A_1, A_2$ sont des coefficients.

τ est un intervalle de temps.

La deuxième composante de la relation (3.7) montre que le processus $h(t)$ contient un élément périodique de fréquence $\beta_4 = \frac{\beta_4}{V}$. La fonction d'autocorrélation (3.7) peut être facilement exprimée en fonction de la distance entre deux points du microprofil considéré. Dans ce cas on aura:

$$K_h(x_s) = D_h \cdot A_1 e^{-\gamma_{01} |x_s|} + D_h \cdot A_2 e^{-\gamma_{02} |x_s|} \cos \beta_4 \cdot x_s \quad (3.8)$$

$$\text{Avec: } \gamma_{01} = \frac{\gamma_1}{V} \quad ; \quad \gamma_{02} = \frac{\gamma_2}{V} \quad ; \quad \beta_4 = \frac{\beta_4}{V} \quad ; \quad x_s = V \cdot \tau \quad (3.9)$$

Où: D_h est la dispersion (variance) du microprofil de la route.

En appliquant la relation de Wiener-Khinchine [6] sur la fonction d'autocorrélation (3.7), on obtient la fonction de la densité spectrale suivante:

$$S_h(\omega) = \sigma_h^2 \cdot \frac{A_1 V \gamma_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + V^2 \gamma_1^2} + \sigma_h^2 \cdot \frac{A_2 V \gamma_2}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + V^2 (\gamma_2^2 + \beta_4^2)}{[\omega^2 + V^2 (\gamma_2^2 + \beta_4^2)]^2 + 4 V^4 \gamma_2^2 \beta_4^2} \quad (3.10)$$

La relation (3.10) prend des formes particulières pour différentes microprofils, mais on note que le premier terme de cette relation est nulle pour les routes en béton.

III.5- Organigramme

Le calcul des densités spectrale et des dispersions est fait numériquement par ordinateur suivant l'organigramme ci-dessous.

Dans cet organigramme, on a prévu le cas où les densités spectrales d'entrée qui sont connues (graphiquement ou analytiquement).

pour le calcul des intégrales; on remplace les bornes infinies par ω_{max} , dans notre cas, on a choisi 150 rad/sec. Le programme en fortran est donné en/9/.

IV-APPLICATION NUMERIQUE

Pour l'application numérique, nous avons choisi le véhicule K66 (Normal) produit par la SNVI de Rouiba. Ce véhicule est équipé d'un moteur Cirta F4L912 et d'une boîte de vitesse de type BBS.

IV.1- Données numériques

Les caractéristiques physiques de ce véhicule sont données dans les tableaux suivants:

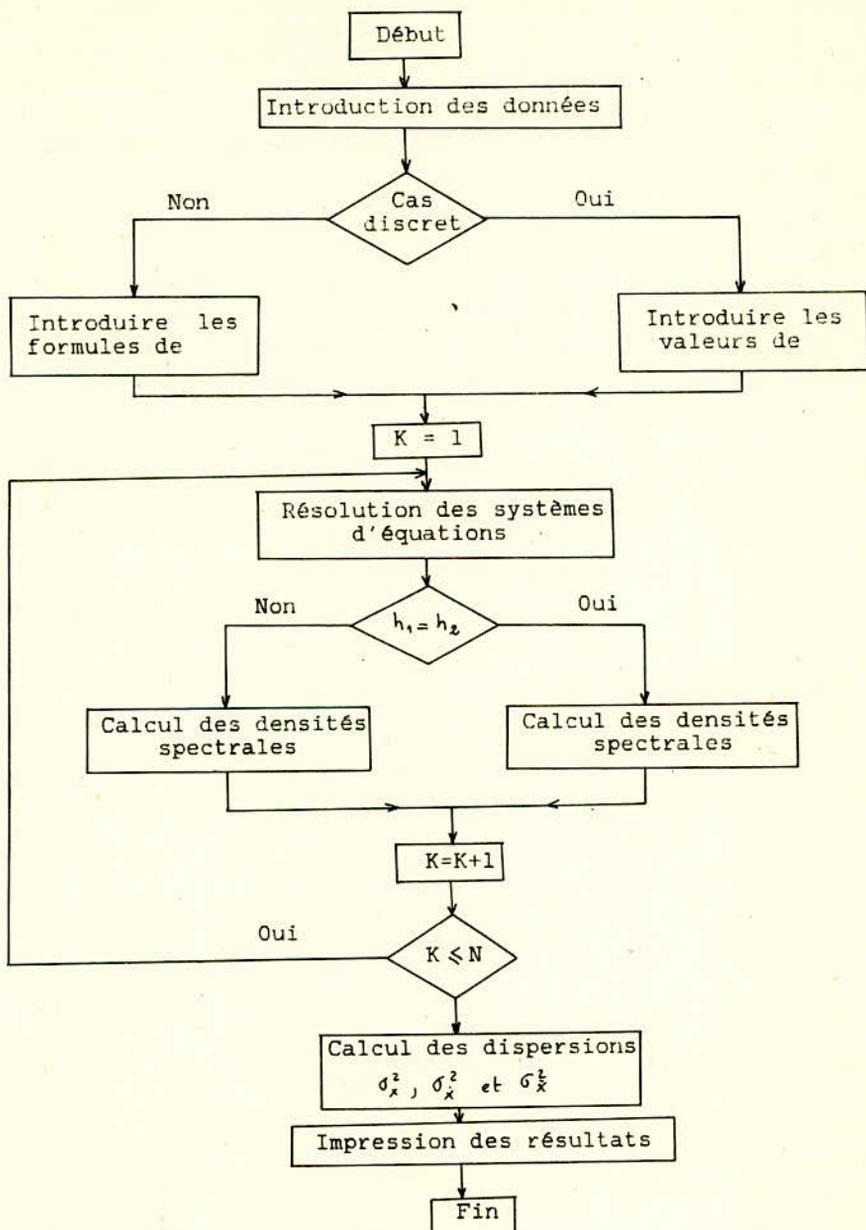
M_1	M_3	M_4	$l_3 = l_4$	$l'_3 = l'_4$	$l''_3 = l''_4$	l_5	l_6	$l_7 = l_8$
(Kg)	(Kg)	(Kg)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)
233	410	400	0.4000	0.8325	0.7650	0.41	0.29	0.265

J_2	J_3	J_4	J'_4	$\beta_A = \beta_B$	$\beta_C = \beta_D$	$c'_1 = c'_2$	$c'_3 = c'_4$
(Kg.m)	(Kg.m)	(Kg.m)	(Kg.m)	(m)	(m)	(N/m)	(N/m)
120	160	150	100	0.265	-0.265	$516 \cdot 10^3$	$15 \cdot 10^4$

$c''_1 = c''_2$	$c''_3 = c''_4$	$\alpha'_1 = \alpha'_3$	$\alpha'_2 = \alpha'_4$	$\alpha''_1 = \alpha''_3$	$\alpha''_2 = \alpha''_4$
(N/m)	(N/m)	(Ns/m)	(Ns/m)	(Ns/m)	(Ns/m)
1113500	$4 \cdot 10^5$	2500	2500	5000	2500

	1	2	3	4	5
M_1 (Kg)	1349	2267	4407	4407	4407
l_1 (m)	0.66	1.30	1.53	1.79	1.90
l_2 (m)	1.94	1.30	1.07	0.81	0.70
$\delta_A = \delta_B$ (m)	-0.66	-1.30	-1.53	-1.79	-1.90
$\delta_B = \delta_C$ (m)	-1.36	-2.00	-2.23	-2.49	-2.60
J_1 (Kg.m ²)	1400	2400	5800	4700	5400
J'_1 (Kg.m ²)	300	500	900	900	900

Des valeurs numériques moyennes pour les coefficients de frottement ont été prises dans la référence/1/.



- 1- Véhicule nu.
- 2- Véhicule vide.
- 3- Véhicule en charge avec charge max sur essieu avant.
- 4- Véhicule en charge avec charge max sur essieu arrière.
- 5- Véhicule en charge avec charge uniformément répartie dans la benne.

IV.2- Forme de la densité spectrale énergétique du microprofil de la route

Les résultats présentés sont les dispersions de déplacement, de vitesse et d'accélération relatifs et absolus des points de fixation du moteur en fonction de la vitesse de déplacement du véhicule, pour différentes formes de la densité spectrale énergétique du microprofil de la route parcourue.

Le calcul numérique a été effectué pour deux formes de la densité spectrale énergétique:

- La première forme est d'après /10/:

$$S_h(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{a v}{\omega^2 + a^2 v^2} \quad (4.1)$$

La forme (4.1) est identique à (3.9) du paragraphe (III.4).

Où: σ^2 est la dispersion des irrégularités de la route.
 a , un coefficient qui dépend de la surface de la route.

La référence /10/ donne pour les coefficients a et σ^2 les valeurs suivantes:

$$a = 0.25 \text{ m}^{-1} \\ \sigma^2 = 9 \text{ mm}^2$$

pour une route goudronnée Fig.1, et

$$a = 0.45 \text{ m}^{-1} \\ \sigma^2 = 300 \text{ mm}^2$$

pour une route pavée Fig.9.

- La deuxième forme est un bruit blanc :

Pour cette forme, on a considéré deux cas:

- $S_h(\omega) = 0.382 \text{ mm}^2 \text{ s}$ Fig.5 .
- $S_h(\omega) = 7.076 \text{ mm}^2 \text{ s}$ Fig.13 .

Ces deux cas correspondent aux valeurs de la densité spectrale de la forme (4.1) pour une pulsation $\omega = 0$ et respectivement pour une vitesse de 10 m/s sur une route goudronnée et une vitesse de 5 m/s sur une route pavée.

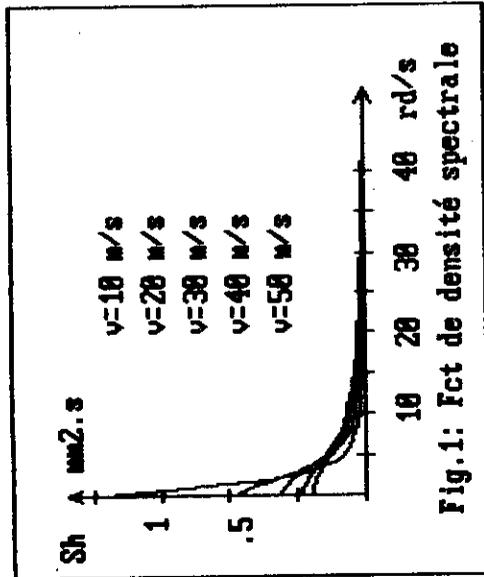


Fig. 1: Fct de densité spectrale

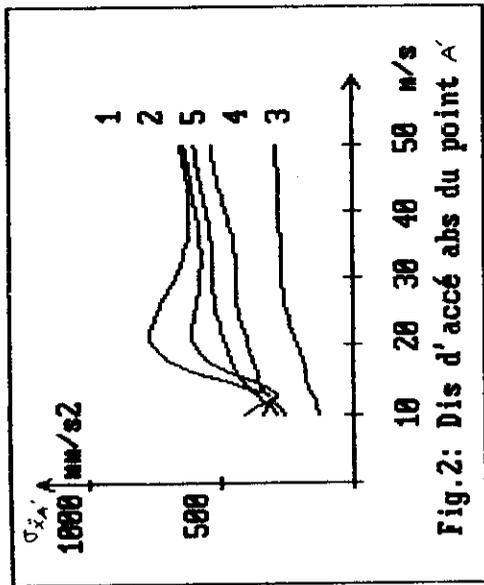


Fig. 2: Dis d'accé abs du point A

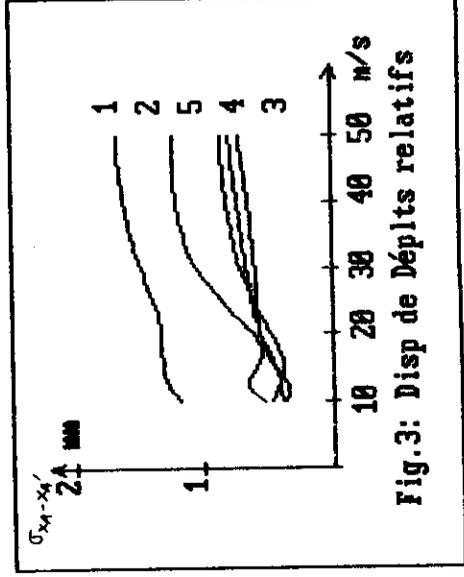


Fig. 3: Disp de Dépits relatifs

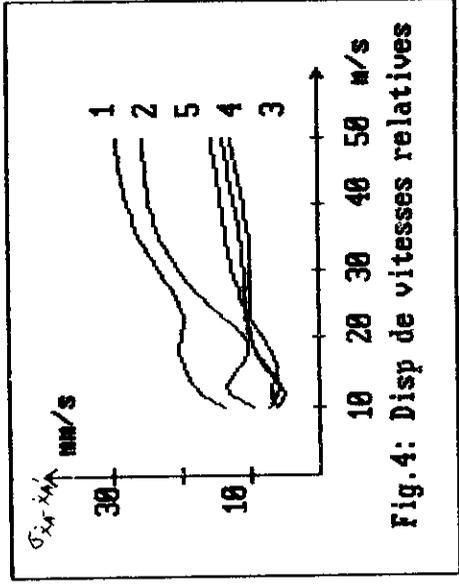


Fig. 4: Disp de vitesses relatives

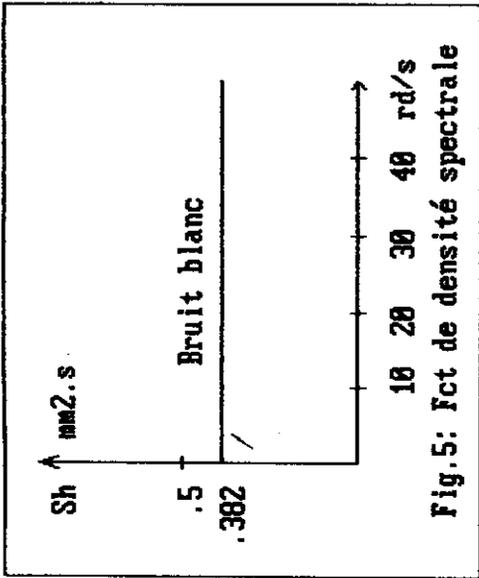


Fig. 5: Fct de densité spectrale

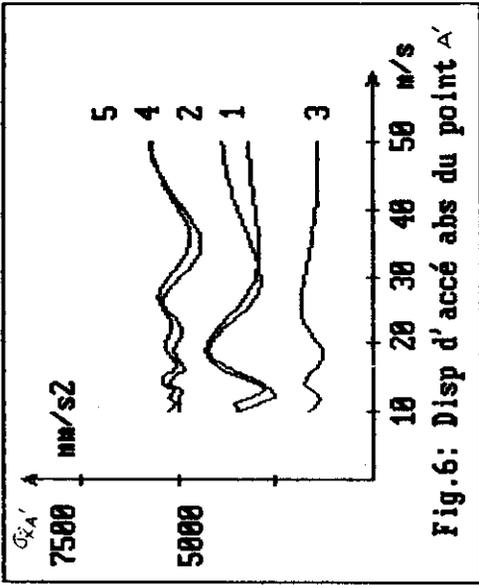


Fig. 6: Disp d'accé abs du point A'

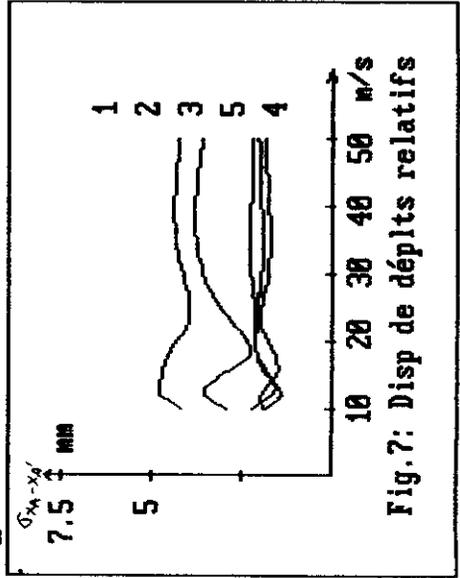


Fig. 7: Disp de déplots relatifs

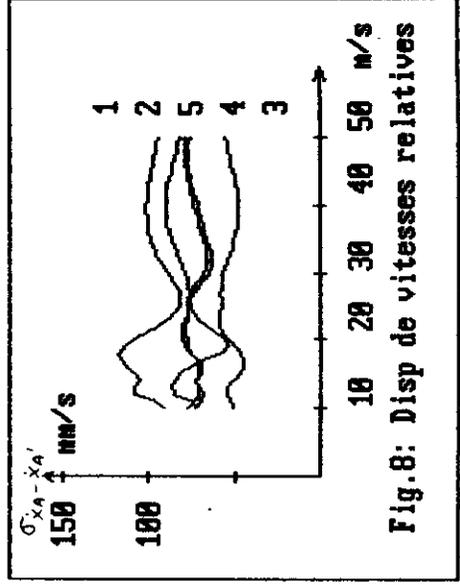


Fig. 8: Disp de vitesses relatives

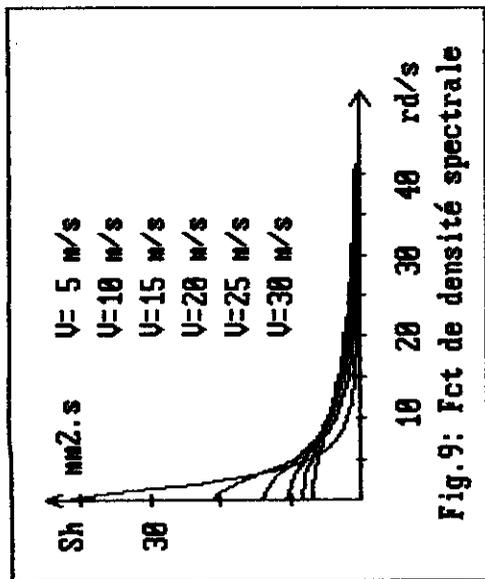


Fig. 9: Fct de densité spectrale

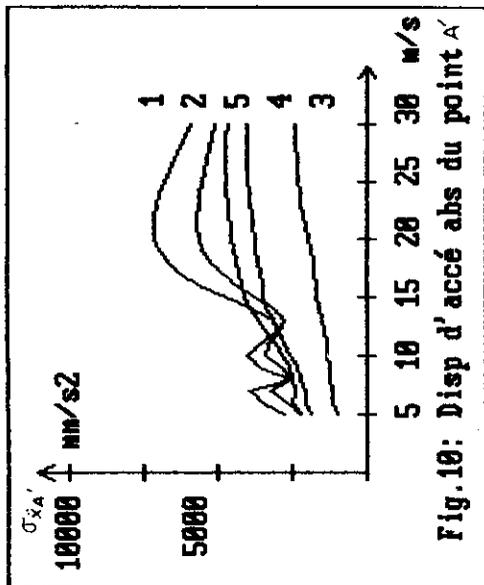


Fig. 10: Disp d'accé abs du point A'

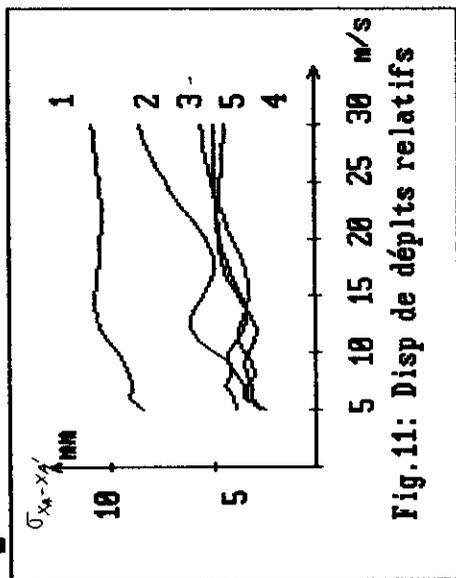


Fig. 11: Disp de départs relatifs

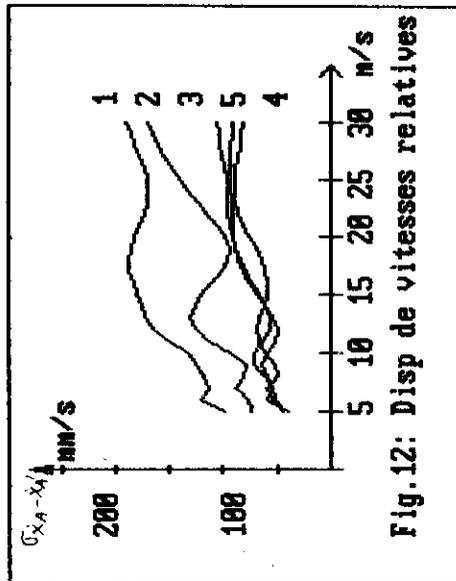


Fig. 12: Disp de vitesses relatives

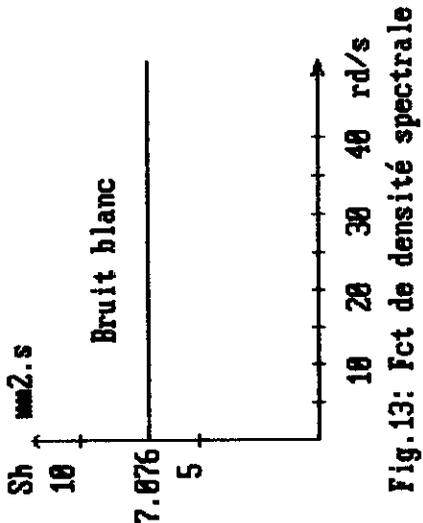


Fig.13: Fct de densité spectrale

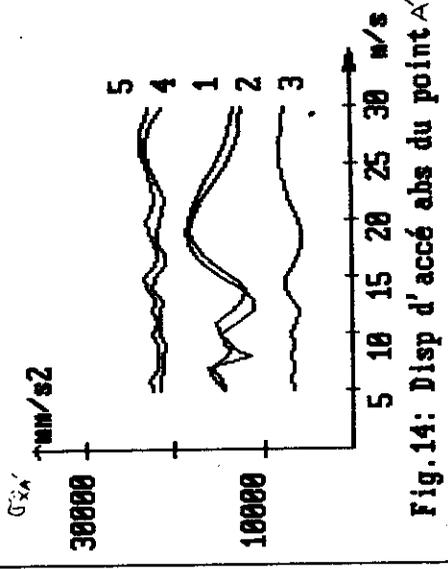


Fig.14: Disp d'accé abs du point A

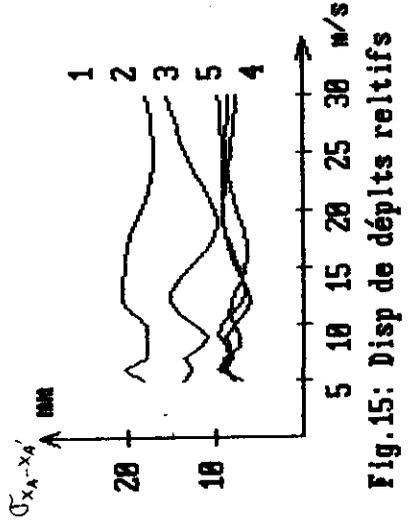


Fig.15: Disp de dépltls reltifs

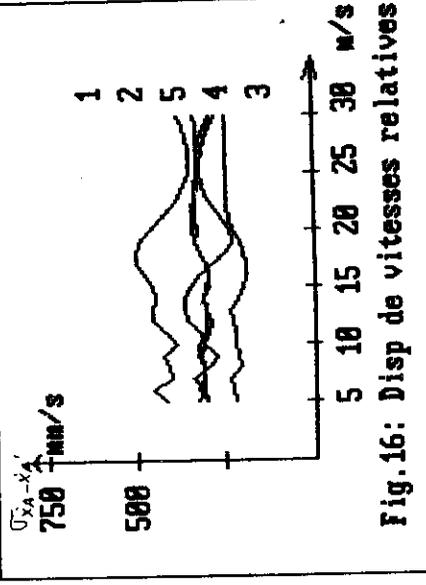


Fig.16: Disp de vitesses relatives

IV.3- Résultats

Les résultats numériques donnés par le programme , ainsi que les différentes formes de la densité spectrale d'entrée sont représentés par des courbes (voir figures).

Sur chaque figure les courbes sont désignées par des chiffres de 1 à 5 , dont chacun correspond à une rigidité et un amortissement bien déterminés , comme suit :

! N° !	Rigidité (N/m)	! Amortissement (Ns/m) !
! 1 !	200000	! 15000 !
! 2 !	500000	! 15000 !
! 3 !	500000	! 30000 !
! 4 !	500000	! 60000 !
! 5 !	500000	! 90000 !

On notera , d'après les figures relatives aux dispersions, que plus la rigidité augmente , plus les différentes dispersions diminuent , mais cette diminution est beaucoup plus marquée dans le cas des dispersions de déplacement relatif, plus prononcée sur les dispersions de vitesse que sur les dispersions d'accélération.

L'augmentation de l'amortissement n'entraîne pas automatiquement la diminution des dispersions , mais il existe une valeur de l'amortissement pour laquelle les dispersions sont minimales ; dispersions représentées par les courbes (3) ($C=500000$ N/m , $\alpha = 30000$ Ns/m) . Notons que les dispersions représentées par les courbes (4) et (5) (amortissements supérieurs à celui correspondant aux dispersions (3)) sont plus grandes.

L'effet d'une variation du coefficient d'amortissement s'avère plus important sur les dispersions d'accélération.

En conclusion , on dira que l'augmentation de la rigidité entraîne une diminution très sensible des dispersions de déplacement relatif ; Tandis que , les dispersions d'accélération sont sensibles au variation de l'amortissement.

Les courbes représentées pour une densité spectrale bruit blanc donnent une idée sur le comportement du système pour une entrée constante, car dans ce cas, ces courbes représentent le comportement des fonctions de transfert et donc celui des dispersions pour d'autres densités spectrales connues.

V. CONCLUSION

Dans cette étude on a réussi à faire un programme qui permet le calcul des dispersions de déplacement, de vitesse et d'accélération pour les quatre points de fixation du moteur d'un véhicule à quatre roues.

On peut calculer les différentes dispersions d'un point quelconque du véhicule. Il suffit pour ce faire, de l'exprimer en fonction en fonction des coordonnées généralisées.

D'après les résultats obtenus, on voit qu'on peut arriver à une vibroisolation optimum on choisissant convenablement la rigidité et l'amortissement du matériau des plots.

Références

- /1/ ROTENBERG R,W -" Podvieska avtomobila" Izd. "Masninstoenie" , Moskva 1972 (en russe).
- /2/ KHATSCHATUROFF A.A ET Coll. -"Dinamika sistiemy dogashina-automobil-voditiel", Izd."Mashinostroenie" Moskva 1976 (en russe)..
- /3/ SILAEV A.A
Théorie spectrale de la suspension à ressort des véhicules de transport.
Machinostroenie Moscou 1972.
- /4/ SVETLICKIJ V.A
Vibrations aléatoires des systèmes mécaniques.
Technique et documentation Paris 1980.
- /5/ JULIEN M.A -"Dynamique de la voiture automobile".
Editions technip , Paris 1960.
- /6/ KSIAZEK M -"Introduction aux vibrations aléatoires des systèmes mécaniques". Cours de poste Graduation.
Département de Génie mécanique E.N.P 1984,Alger.
- /7/ MITSCHKE M. "Influence of road and vehicule dimensions on the amplitude of bady motions and dynamic whell loads". (Théorical and expérimetal vibration investigations).
SAE Preprints, 1963 ,N° 630310 ,pp.67-89.
- /8/ AMIROUCHE Y.
Etude des vibrations longitudinales d'un véhicule produit par SNVI de Rouiba.
Projet de fin d'études dirigé par KSIAZEK M. E.N.P, Juin 1986,Alger.
- /9/ TAHI A.
Dispersion de déplacement et d'accélération des points de fixation du moteur.
Projet de fin d'études dirigé par KSIAZEK M. E.N.P, Juin 1987,Alger.
- /10/ HAC, A.,
Suspension Optimization of 2-DOF Vehicule Model using Stochastic optimal control Technique.
Journal of Sound and Vibration.Vol 100,N° 3 ,June 1985, pp.343-357.

**DIMENSIONNEMENT DES BIELLES DES MOTEURS
THERMIQUES à COMBUSTION INTERNE.**

M. BOUKABACHE C,C.; B. CHOUCHAOUI Ing.

Département de Génie mécanique
Laboratoire de Mécanique du solide, ENP.

تلخيص :

تستهدف هذه الدراسة تحديد أبعاد الذراع بالنسبة للمحركات ذات الاحتراق الداخلي الرباعية الأشواط وذلك باستعمال الطرق المعتادة المعتمدة على التجربة، و الطرق الحديثة (العناصر المنتهية) ويتبع ذلك تطبيق على المحرك F 4 L 912 المصنوع بمعمل المحركات و الجرارات بقسنطينة .

ABSTRACT:

The purpose of this study is to size rods of Diesel four-stroke in line engines, by classical method based on experimentation and modern one (finite elements method).

A particular application treats the F4L 912 engine, made by PMA/CMT.

RESUME:

Le but de cette étude est le dimensionnement des bielles pour moteurs Diesel à quatre temps en ligne, en utilisant les méthodes classique basée sur l'expérimentation et moderne (éléments finis)

Une application particulière est faite sur le moteur F4L 912, construit par PMA/CMT.

1. INTRODUCTION

Dans toutes les machines à pistons, la bielle est une pièce qui associée à un piston d'une part, et à la manivelle d'autre part, transforme un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement rotatif continu.

La bielle est constituée de trois parties distinctes:

- le corps de bielle, de section en I, à larges ailes, dont l'âme est située dans le plan d'oscillation,

- le pied de bielle, permettant la liaison de la bielle à l'axe du piston. L'assemblage axe-pied de bielle est du type tournant sous charge. Le pied de bielle est conçu pour résister aux efforts de traction périodiques dues aux effets d'inertie du piston, en phase d'admission,

- la tête de bielle, permettant la liaison de la bielle à la manivelle du vilebrequin. L'assemblage tête de bielle-maneton est soumis à des efforts dépendant:

- des forces agissant selon l'axe du cylindre,
- de l'angle que fait la bielle avec l'axe du cylindre,
- et des efforts d'inertie de la masse rotative.

2. CALCUL DE LA BIELLE DU MOTEUR

Application au moteur F4L 912.

Le dimensionnement de la bielle de moteurs thermiques à combustion interne, est très délicat, vu les impératifs discordants (solicitations externes, vibrations, fatigue...), que doit subir cet élément.

Dans ce qui suit, nous allons exposer les deux principale méthodes de calcul, à savoir la méthode classique et celle par éléments finis, ainsi qu'une comparaison des résultats obtenus par ces dernières.

2.1 Méthodes classiques

La vérification des dimensions de la bielle est ainsi basé sur des relations empiriques classiques, souvent adoptées dans l'industrie.

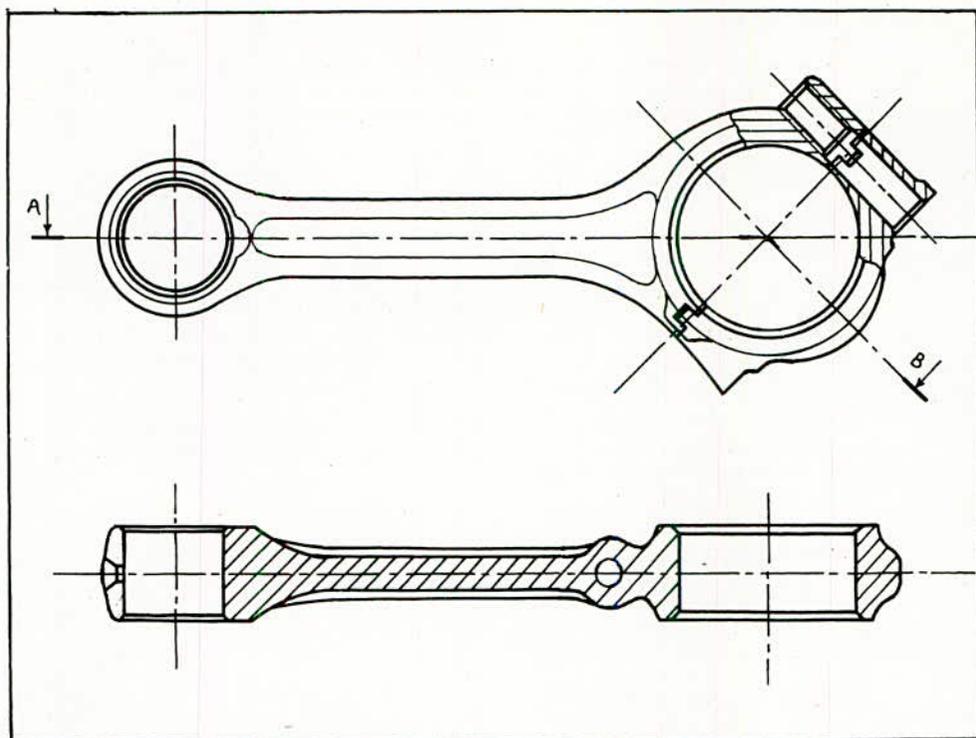


Figure 1: Schéma de la bielle du moteur F4L 912.

2.2.1 Dimensions générales:

Nous donnerons dans ce qui suit, les dimensions générales d'une bielle traitée, de moteur Diesel, à quatre temps, tel qu'on l'envisage actuellement dans l'industrie, ainsi que celles de la bielle du moteur F4L 912, rapportées à l'alésage:

Dimensions \ Rapports adoptés	dans l'industrie	pour le F4L 912
Section droite	$(0,040 \text{ à } 0,050)D$	0,0406D
Largeur de bielle	$(0,22 \text{ à } 0,37)D$	0,28D
Hauteur de bielle	$(0,3 \text{ à } 0,35)D$	0,34D

Les dimensions du pied de bielle sont fonction de celles de l'axe du piston. Les dimensions de la tête de bielle quand à elles sont nettement supérieures à celles du pied, la bielle s'épanouissant depuis son pied jusqu'à sa tête.

2.2.2 Vérifications aux contraintes et déformations

a/ Vérification du corps de bielle:

Contrainte maximale de / Elément	CORPS DE BIELLE
traction-compression σ_c max	147,02 MPa
flexion σ_f max	87,38 MPa
flambage dans le plan: - d'encastrement σ_{fl} enc - d'oscillation σ_{fl} osc	543,61 MPa 351,59 MPa

b/ Vérification du pied de bielle:

Pour pied de la bielle du moteur F4L 912, $\theta_{enc} = 126^\circ$.

Contrainte / Elément	PIED DE BIELLE
maximale de flexion σ_f max	5,7 MPa
maximale de traction σ_t max	20,27 MPa
résultante $\sigma_{rés}$	25,97 MPa

c/ Vérification de la tête de bielle:

Pour la tête de la bielle du moteur F4L 912, $\theta_{enc} = 118^\circ$.

Contrainte / Elément	TETE DE BIELLE
maximale de flexion σ_f max	8,79 MPa
maximale de traction σ_t max	10,05 MPa
résultante $\sigma_{rés}$	18,84 MPa

2.2 Méthodes modernes

L'approche dimensionnelle de la bielle du moteur F4L 912, a porté sur l'utilisation du "SAP IV", programme industriel du département de Génie-Civil de l'université de Berkeley en Californie.

2.2.1: Maillage:

Le maillage de la bielle fait appel à l'élément 2 du programme SAPIV, en l'occurrence l'élément spatial de poutre.

L'élément poutre spatial ainsi utilisé, prend en compte la torsion, la flexion par rapport à deux axes orthogonaux, les déformations axiale et de cisaillement. L'élément est prismatique et les cas de chargement peuvent comprendre un chargement inertielle dans les trois directions et les forces données, imposées aux extrémités. Les forces (effort axial et effort tranchant) ainsi que les moments (moments de flexion et de torsion) sont calculés dans le système d'axes local de l'élément.

Pour des raisons de simplification de la discrétisation, nous avons jugé bon de décomposer la bielle en trois parties, le calcul de chacune se faisant à part.

Ainsi, la bielle est décomposée en:

- tête de bielle,
- corps,
- et pied de bielle.

Le maillage de chaque partie est donné par les figures 2 et 3.

L'étude envisagée est une étude statique. La tête et le pied de bielle n'étant soumis qu'aux effets d'inertie des masses rotative et alternative, nous ne vérifierons ces derniers qu'aux valeurs maximales de ces efforts. Le pied de bielle présente en plus un plan de symétrie, on ne considérera dans notre analyse qu'une moitié de structure. Les conditions aux limites considèrent les deux encastres pour la tête de bielle, l'encastrement et la jonction avec la seconde moitié de structure (une seule translation permise) pour le pied de bielle. Il est à noter que les déformations sont planes.

Quand qu'au corps de bielle, il a été modélisé par une poutre à section variable dont une extrémité est sollicitée par un effort normal (donné par le programme SYNTHÈSE, partie étude dynamique, avec le cycle réel relevé au niveau du labo moteur), la seconde simplement appuyée.

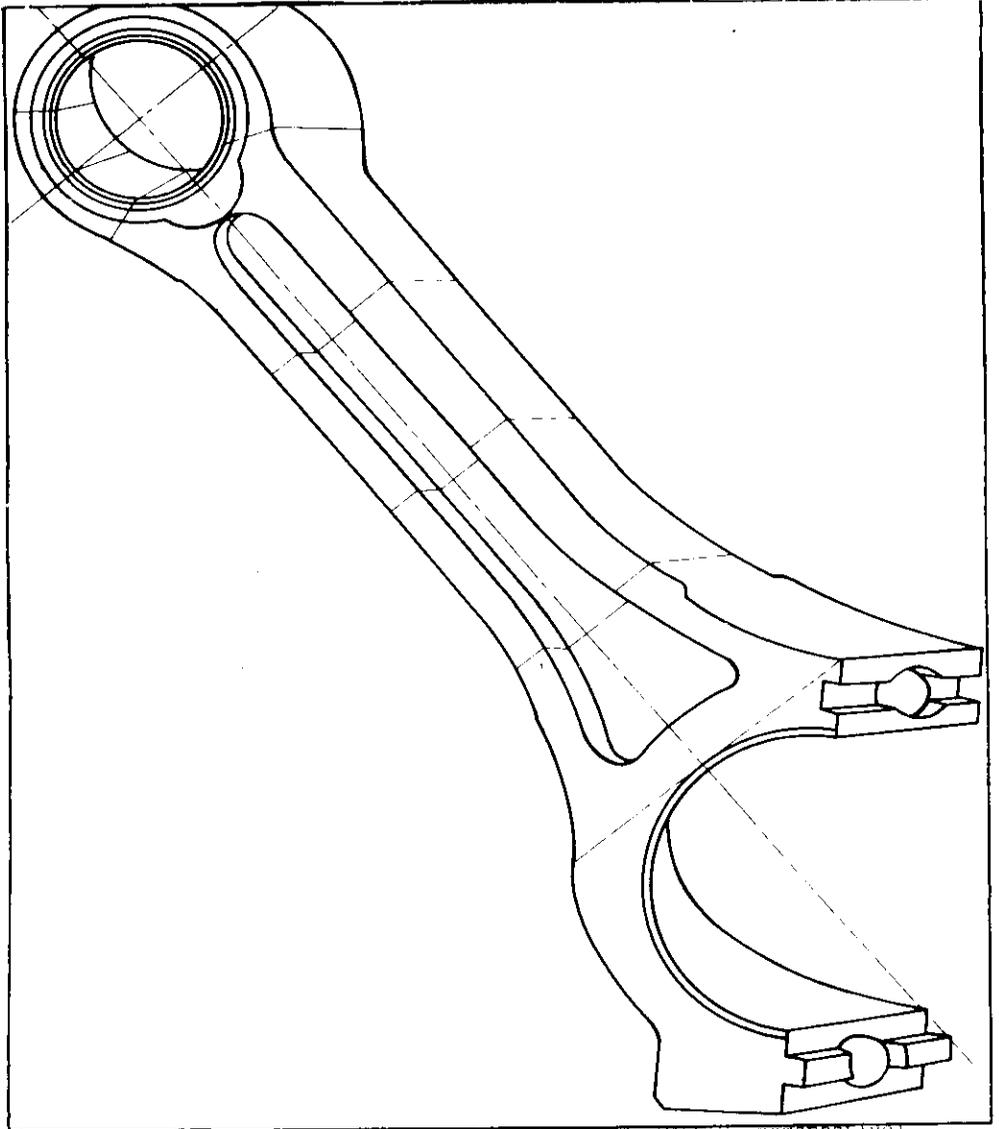


Figure 2: Maillage de la bielle du moteur F4L912 (perspective).

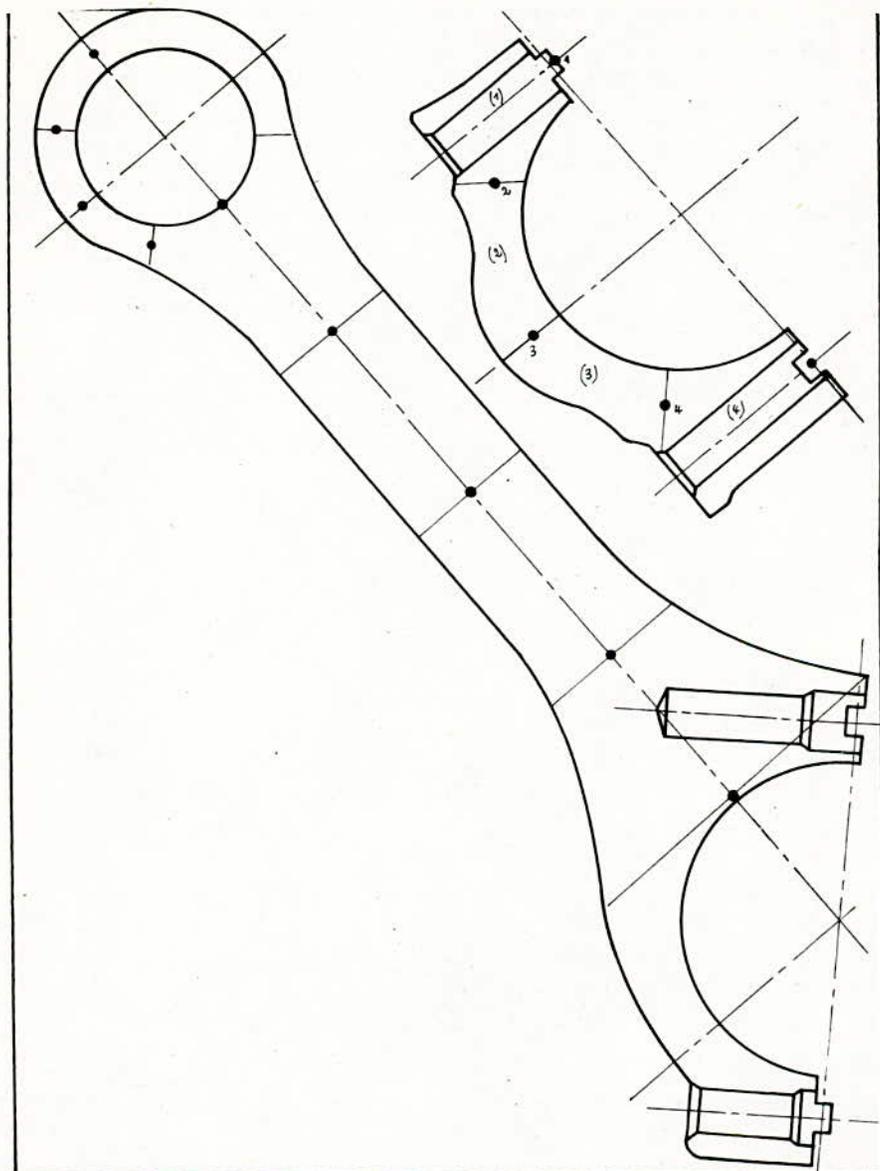


Figure 3: Maillage de la bielle du moteur F4L912 (représentation des noeuds).

2.2.2 Résultats obtenus

a/ Le corps de bielle:

a.1/ Déplacements:

Noeud	DEPLACEMENTS					
	Translation (en mm) selon			Rotation (en rd) autour de		
	X	Y	Z	XX	YY	Z Z
1	0,00000E+00		0,00000E+00		0,00000E+00	
2	0,00000E+00		-0,51137E+00		0,00000E+00	
3	0,00000E+00		-0,47177E+00		0,00000E+00	
4	0,00000E+00		-0,37153E+00		0,00000E+00	
5	0,00000E+00		0,21008E+00		0,00000E+00	

a.2/ Contraintes:

Elément	Effort Axial (N)	Section Axial (mm ²)	Contrainte (MPa)
1	(+/-)4,489E+05	0,616E+03	728,73
2	(+/-)3,277E+05	0,406E+03	807,43
3	(+/-)2,035E+05	0,406E+03	501,23
4	(+/-)7,063E+04	0,406E+03	114,74

b/ Pied de bielle:

b.1/ Déplacements:

Noeud	DEPLACEMENTS					
	Translation (en mm) selon			Rotation(en rd) autour de		
	X	Y	Z	XX	ZZ	YY
1	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
2	0,402E-03	0,000E+00	0,235E-02	0,000E+00	0,629E-05	0,000E+00
3	0,560E-03	0,000E+00	0,467E-02	0,000E+00	0,106E-03	0,000E+00
4	0,000E+00	0,000E+00	0,640E-02	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00

b.2/ Efforts et moments:

Elément	Noeuds	Effort Axial	Effort tranchant	Moment Fléchissant
		en (N)	en (N)	en (N.mm)
1	1 & 2	4,643E+03	3,168E+03	-3,371E+04 -3,577E+04
2	2 & 3	5,484E+03	1,233E+03	3,577E+04 -1,504E+04
3	3 & 4	2,994E+03	4,757E+03	1,504E+04

b.3/ Contraintes:

b.3.1-Contrainte axiale:

Pour une section axiale de $0,221E+03 \text{ mm}^2$, nous avons:

Elément	Contrainte Axiale (MPa)
1	21,00
2	24,82
3	13,55

b.3.2-Contrainte de cisaillement:

Pour une section cisailée de $0,221 E+03 \text{ mm}^2$, nous avons:

Elément	Contrainte de cisaillement (MPa)
1	14,34
2	5,58
3	21,52

b.3.3-Contrainte de flexion:

Pour un module d'inertie de $6 550,169 \text{ mm}^3$, nous avons:

Elément	Noeud	Contrainte de Flexion (MPa)
1	1	-5,15
	2	-5,46
2	2	5,46
	3	-2,30
3	3	2,30
		10,25

b.3.4-Contraintes équivalentes:

Selon les critères de flexion composée, les contraintes équivalentes sont données par:

Elément	Noeud	Contrainte Equivalente (MPa)
1	1	25,94
	2	26,02
2	2	26,02
	3	25,54
3	3	25,54
	4	27,41

c/ Tête de bielle:

c.1/ Déplacements:

Noeud	DEPLACEMENTS					
	Translation (en mm) selon			Rotation (en rd) autour de		
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00
2	-0,988E-03	0,878E-02	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,184E-03
3	0,446E-04	0,862E-02	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,114E-04
4	0,109E-02	0,409E-02	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,502E-04
5	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00

c.2/ Efforts et moments:

Elément	Noeuds	Effort Axial	Effort tranchant	Moment Fléchissant
		en (N)	en (N)	en (N.mm)
1	1	-5,504E+03	-1,123E+03	0,000E+00
	2	5,504E+03	1,123E+03	-3,341E+04
2	2	-5,563E+03	3,553E+03	3,341E+04
	3	5,563E+03	-3,553E+03	3,496E+04
3	3	-5,134E+03	-3,917E+03	-3,496E+04
	4	5,134E+03	3,917E+03	-3,402E+04
4	4	-5,370E+03	1,062E+03	3,402E+04
	5	5,370E+03	-1,062E+03	-1,819E-12

c.3/ Contraintes:

c.3.1-Contrainte axiale:

Pour une section axiale de $0,306E+03 \text{ mm}^2$, nous avons:

Elément	Contrainte Axiale (MPa)
1	(+/-)17,99
2	(+/-)18,18
3	(+/-)16,78
4	(+/-)17,55

c.3.2-Contrainte de cisaillement:

Pour une section cisailée de $0,306 E+03 \text{ mm}^2$, nous avons:

Elément	Contrainte de cisaillement (MPa)
1	(+/-) 3,67
2	(+/-)11,61
3	(+/-)12,80
4	(+/-) 3,47

c.3.3-Contrainte de flexion:

Pour un module d'inertie de $3 685 \text{ mm}^3$, nous avons:

Elément	Noeud	Contrainte de Flexion (MPa)
1	1	0,00
	2	-9,07
2	2	9,49
	3	9,49
3	3	-9,49
	4	9,23
4	4	-9,23
	5	-4,94E 16

b.3.4 Contraintes équivalentes:

Similairement à la méthode utilisée pour le calcul des contraintes équivalentes concernant le pied de bielle, nous avons:

Elément	Noeud	Contrainte Equivalente (Mpa)
1	1	18,36
	2	20,48
2	2	23,40
	3	23,57
3	3	23,14
	4	23,03
4	4	13,51
	5	9,86

2.3: Comparaison et commentaires:

Concernant le corps de bielle, qui est la partie de la plus soumise aux efforts de pression et d'inertie, la méthode des éléments finis montre que la bielle ne flambe pas (pas de rotation de la section droite), alors que par la méthode classique la bielle est vérifiée au flambage. Ceci s'explique par le fait que le corps de bielle peut être considéré comme une poutre courte, soumise uniquement à l'effort normal provoquant une compression.

Pour le pied et la tête de bielle, les contraintes calculées par les deux méthodes sont voisines. Néanmoins la méthode des éléments finis a l'avantage de pouvoir calculer les déformations et les contraintes au niveau des concentrations de contraintes tel que au niveau des changement de section, des trous de graissage, etc...

Les contraintes résultantes restent dans tous les cas inférieures à celle du matériau de la bielle traitée.

3. CONCLUSION:

Le dimensionnement de la bielle restant un problème d'ordre actuel, par les exigences -souvent contradictoires- que doit vérifier cet élément, dont le plus en vue, le critère de légèreté et résistance, notre étude reste un outil assez simplifié pour la résolution du problème posé.

En effet, bien que permettant la comparaison des résultats des méthodes classique et moderne, dont les valeurs sont assez voisines, cette étude par éléments finis doit être complétée par une analyse dynamique dans le but est de déterminer les fréquences de vibrations, ainsi que par des essais expérimentaux dans les conditions de fonctionnement.

BIBLIOGRAPHIE

- 1- R. BRUN **Sciences et techniques du moteur Diesel industriel et de transport.**
Ed. Societé Technip. 1984
- 2- A. QUILLET **Encyclopédie des sciences industrielles**
Tome: Application.Transport.
Ed. Quillet. 1984
- 3- B. SWOBODA **Mecanique des moteurs alternatifs.**
Ed. Technip.1984
- 4- A. QUILLET **Encyclopédie Technique de l'Ingenieur.**
Tome: B. 3
Ed. Quillet. 1986
- 5- B. CHOUCHAQUI
M. BOUKABACHE
S. RECHAK **Synthèse des moteurs en ligne et en V.**
Projet d'Ingéniorat. Promo. Juin 1988
Département de Genie-Mécanique/ENP
- 6- SAPIV **Manuel d'utilisation du SAPIV.**
Université de berkeley, Califonie.80

VOLANT REGULATEUR DE VITESSE

M. BOUKABACHE ,C.C.; S. MEKID ,Ing.

Departement de Genie Mecanique
Laboratoire de Mecanique du solide. ENP

ملخص :

ان عدم نظامية المزدوجات في المحركات المتناوبة ذات الاحتراق الداخلي راجع الى وجود شوط واحد للتحريك مقابل ثلاثة مشواط مقاومة في دورة واحدة لكل اسطوانة . ان جمع عدة اسطوانات يقلل من عدم الانتظام الا انه لا يلغيه تماما وهذا التغير موجود على مستوى سرعة عمود الدوران . ولجعل عدم الانتظامية الدورية هذه تاخذ قيمة مقبولة نستعمل عجلة عطالة من النوع النواسي على مستوى العمود المرفقي مما يسمح بالاضافة الى عدم انتظامية فضلى ، الحصول على منظومة ميكانيكية اخف بالمقارنة مع عجلة العطالة المعتادة .

ABSTRACT

In the alternating internal combustion engines, the irregularity of torques is due to the fact that there exists only one engine time for three resistant time per cycle and per cylinder .In the case of many cylinders ,the irregularity decreases but still exists .This variation is found at the level of the rotating speed of the shaft line .
In order to obtain acceptable values of the cyclic irregularity , we apply a pendulum wheel to the crankshaft. In addition to a better regularity , a lighter mechanical system than the traditional inertia wheel .

RESUME

L'irrégularité des couples dans les moteurs alternatifs à combustion interne est due au fait qu'il n'y a qu'un seul temps moteur pour trois temps résistants par cycle et par cylindre . Le groupement de plusieurs cylindres limite, sans pour autant annuler ,cette irrégularité dont l'influence se représente au niveau de la vitesse de rotation de la ligne d'arbre .
Pour ramener l'irrégularité cyclique a un seuil acceptable nous appliquons au vilebrequin , un volant de type pendulaire, ce qui permet en plus d'une régularité meilleure, d'avoir un système mécanique plus léger que le volant d'inertie traditionnel.

1. INTRODUCTION

Le moteur a explosion interne, de par son fonctionnement est un générateur d'oscillations de torsion ,les efforts produits par

- la compression des gaz avant explosion
- l'explosion des gaz dans les cylindres
- le mouvement des pistons et bielles

agissent sur le vilebrequin ,en modifiant sans cesse sa vitesse de rotation autour d'une valeur moyenne.

On remédie généralement a ce type de problème par l'emploi du volant d'inertie ,qui régularise le couple moteur et contribue ainsi a améliorer la régularité cyclique .

Cependant cette solution ,ne donne pas entière satisfaction, particulièrement pour les véhicules industriels .

C'est a ce titre que nous développons les volants de types pendulaire à masse auxiliaires roulantes, susceptibles de mieux régulariser la vitesse de l'arbre .

Le principe consiste a utiliser des masses pendulaires centrifuges indépendantes ,qui oscillent sans frottement, dans des cavités cylindriques équidistantes ,a une distance R du centre du volant .

Les effets dynamiques maintiennent l'orientation des masses oscillantes qui s'opposent au mouvement et engendrent une inertie supplémentaire qui s'ajoute a celle de la ligne d'arbre .

2. ETUDE DU VOLANT PENDULAIRE

La finalité de l'étude du volant pendulaire est d'obtenir :

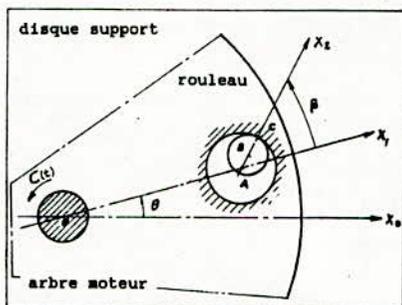
- Une régularité cyclique supérieure ou égale à celle obtenue avec un volant classique .

Une masse inférieure a celle d'un volant classique.

L'étude est à effectuer au régime de ralenti du moteur ,pour améliorer le confort des usagers .

2.1 Modèle utilisé

Système à un seul étage de masses oscillantes et roulantes.



OA=R: Rayon de perçage du trou dans le disque support.

AB=L: Entraxe entre le pendule et son logement .

BC=r: Rayon du rouleau

Fig.1 Amortisseur pendulaire .

L'étude de notre système est faite dans le cas le plus défavorable c'est a dire lorsque le moteur est au ralenti (decouplé de l'ensemble récepteur), en prenant comme valeur moyenne du régime moteur ω .

Dans le but de faciliter les calculs, on suppose ,un roulement sans glissement au point de contact (C) rouleau-disque support.

Le couple C(t) auquel est soumis le volant est :

$$C(t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sin(p\omega t + \varphi_p)$$

Les termes a_0, a_1, a_2, \dots , désignent des constantes telles que: Le premier terme a_0 représente la valeur moyenne du couple au cours d'un cycle , et les termes suivants constituent chacun l'amplitude relative à l'harmonique du couple.

Si l'on considère que l'harmonique prédominante est q ,on pourra écrire :

$$C(t) = a_q \sin q\omega t$$

2.2 Equation du système

L'énergie cinétique T de l'ensemble s'exprime par :

$$T = T_1 + T_2$$

Avec T₁ et T₂ respectivement énergies cinétiques du disque support et du pendule données par :

$$T_1 = 1/2 J \cdot \dot{\theta}^2$$

$$T_2 = 1/2 m(R^2 \dot{\theta}^2 + L^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\beta}^2) + 2RL\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\beta})\cos\beta) + \\ + \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2$$

soit

$$T = 1/2 I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(R^2 \dot{\theta}^2 + 2RL\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\beta})\cos\beta + \\ + (L^2 + r^2/2)(\dot{\theta} + \dot{\beta})^2)$$

En appliquant les équations de Lagrange on obtient le système d'équations du mouvement suivant :

$$(m(R^2 + 2RL\cos\beta + L^2 + r^2/2) + I)\ddot{\theta} + \\ + m(RL\cos\beta + L^2 + r^2/2)\ddot{\beta} - (2\dot{\theta}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2) mRL\sin\beta = C(t) \quad (1)$$

$$(m(L^2 + r^2/2 + RL\cos\beta))\ddot{\theta} + m(L^2 + r^2/2)\ddot{\beta} + mRL\dot{\theta}^2\sin\beta = 0 \quad (2)$$

Nous obtenons donc un système d'équations différentielles couplées non résolubles analytiquement, auquel nous proposons une résolution par une méthode numérique .

3. INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS

Le système d'équations (1) et (2) n'étant pas du 1er ordre ,on pose le changement de variable suivant :

$$Y_1 = \theta$$

$$Y_2 = \dot{\theta}$$

$$Y_3 = \beta$$

$$Y_4 = \dot{\beta}$$

On obtient le système d'équations :

$$a_{11} \dot{Y}_2 + a_{12} \dot{Y}_4 = b_1$$

$$a_{21} \dot{Y}_2 + a_{22} \dot{Y}_4 = b_2$$

Avec les notations suivantes :

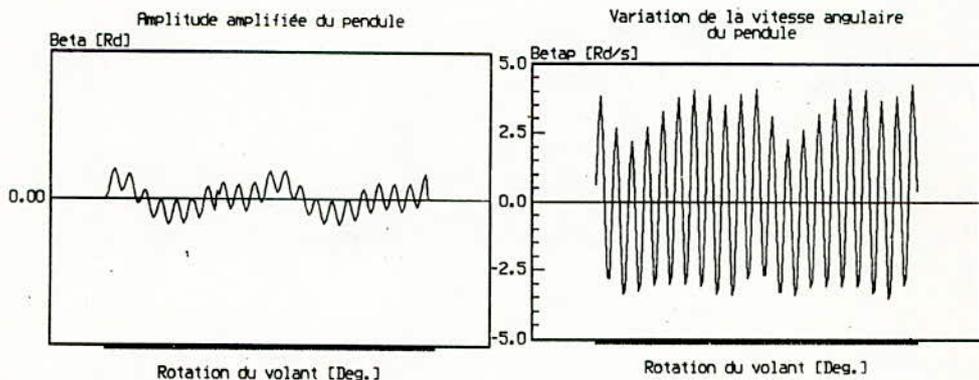
$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 1/2 r^2 + L^2 + RL \cos Y3 \\
 a_{12} &= 1/2 r^2 + L^2 \\
 a_{21} &= m(R^2 + 1/2 r^2 + L^2 + 2RL \cos Y3) + I \\
 a_{22} &= m(L^2 + 1/2 r^2 + RL \cos Y3) \\
 b_1 &= -RL \sin Y3 \cdot \dot{Y}_2 \\
 b_2 &= (2Y_2 + Y_4) Y_4 mRL \sin Y3 + C(t)
 \end{aligned}$$

Finalement on obtient un système différentiel du 1er ordre facilement intégrable :

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_1 &= Y_2 \\
 \dot{Y}_2 &= (a_{12} b_2 - a_{22} b_1) / (a_{11} a_{21} - a_{11} a_{22}) \\
 \dot{Y}_3 &= Y_4 \\
 \dot{Y}_4 &= (a_{21} b_1 - a_{11} b_2) / (a_{11} a_{21} - a_{11} a_{22})
 \end{aligned}$$

L'intégration des équations par la méthode de Runge-Kutta d'ordre n, utilise la solution approchée au point n-1. A chaque pas de temps on calcule θ et β ainsi que leur dérivées $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ par rapport au temps; ce qui nous permet d'avoir :

- l'écart de fluctuation de la vitesse θ autour du régime moyen
- l'amplitude angulaire du pendule β .



Nous remarquons que l'amplitude du pendule reste assez faible, donc on peut linéariser les équations du mouvement; ce qui nous permet d'obtenir :

- les pulsations propres du pendules
- le moment d'inertie équivalent du système I_{eq} .

4. LINEARISATION DES EQUATIONS

Les solutions en β et $\dot{\beta}$ données par la méthode de Runge-Kutta sont suffisamment petites (faible amplitude du pendule), pour nous permettre de poser :

$$\begin{aligned}\cos \beta &= 1 \\ \sin \beta &= \beta\end{aligned}$$

De même on pourra négliger tous les termes du 2ème et 3ème ordre formés par β et $\dot{\beta}$.

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$(m(R^2 + 2RL + L^2 + 1/2 r^2) + I) \ddot{\theta} + m(RL + L^2 + 1/2 r^2) \ddot{\beta} = C(t) \quad (3)$$

$$(m(L^2 + 1/2 r^2 + RL)) \ddot{\theta} + m(L^2 + 1/2 r^2) \ddot{\beta} + mRL\dot{\theta}^2 \beta = 0 \quad (4)$$

4.1 Calcul approximatif des pulsations propres du pendule

Si on considère θ faible, on peut poser :

$$\dot{\theta}^2 = \Omega^2$$

$$\text{et } \ddot{\theta} = 0 \text{ avec } \Omega = \text{Cte}$$

La pulsation du pendule s'exprime par :

$$\omega_p = \Omega \sqrt{RL / (r^2/2 + L^2)} = q\Omega$$

4.2 Calcul approximatif du moment d'inertie équivalent I_{eq}

Si on considère que le disque tourne à une vitesse constante, on superpose à ce mouvement une vibration telle que :

$$\begin{aligned}\text{d'où} \quad \theta &= \Omega t + \alpha \\ \text{et} \quad \dot{\theta} &= \Omega + \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\alpha}\end{aligned}$$

Pour α petit on pose : $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$ d'où $\dot{\theta}^2 = \Omega^2$
Les équations (3) et (4) deviennent :

$$(m(R^2 + 2RL + L^2 + r^2/2) + I) \ddot{\alpha} + m(RL + L^2 + r^2/2) \ddot{\beta} = C(t) \quad (5)$$

$$(m(L^2 + r^2/2 + RL)) \ddot{\alpha} + m(L^2 + r^2/2) \ddot{\beta} + mRL\Omega^2 \beta = 0 \quad (6)$$

Après un changement de variable, ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$A \ddot{\alpha} + B \ddot{\beta} = C(t) \quad (7)$$

$$B \ddot{\alpha} + C \ddot{\beta} + D \dot{\beta} = 0 \quad (8)$$

Si nous supposons que le pendule oscille à sa pulsation propre telle que β est de la forme :

$$\beta = b \sin \omega_p t \quad (9)$$

d'où $\ddot{\beta} = -\omega_p^2 \beta \quad (10)$

Après arrangement, le système d'équation (7) et (8) donne

$$A \ddot{\alpha} + B \ddot{\alpha} (-B/(C-D/\omega_p^2)) = C(t) \quad (11)$$

ou

$$(A + B^2/(D/\omega_p^2 - C)) \ddot{\alpha} = C(t)$$

En identifiant avec avec la 2ème loi de Newton appliquée à la rotation, on déduit le moment d'inertie équivalent :

$$I_{eq} = A + \frac{B}{\frac{D}{\omega_p^2} - C}$$

$C(t)$ est connu, on peut l'exprimer en fonction de son harmonique prédominante :

$$C(t) = a q \sin q \Omega t$$

Soit en remplaçant les coefficients A,B,C,D par leur valeurs, on aura le moment d'inertie équivalent du système:

$$I_{eq} = I + 3/2 m r^2 + 3m(R+L)^2 + \frac{3m(r^2/2 + L(R+L))^2}{\frac{RL}{q^2} - (L^2 + r^2/2)} \quad (12)$$

A l'accord du pendule, le moment d'inertie équivalent tend vers l'infini.

En d'autres termes si :

$$\frac{RL}{q^2} - (L^2 + r^2/2) = 0 \quad (13)$$

Les inerties équivalentes I_{eq} en fonction des harmoniques q sont données dans les tableaux si dessous, pour les valeurs des paramètres R, r, m, L et R_p

Premier choix :

$R = 110 \text{ mm}, r = 10 \text{ mm}, m = 48.50 \text{ g}, L = 25.50 \text{ mm}, R_p = 35.50 \text{ mm}$

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_{eq}	2.423	4.21	2.418	2.419	2.419	2.419	2.419	2.419	2.419	2.42

Deuxième choix :

$R = 129.9 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $m = 31 \text{ g}$, $L = 32.07 \text{ mm}$, $R_p = 37.00 \text{ mm}$

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ieq	2.423	11.89	2.418	2.419	2.419	2.419	2.419	2.419	2.419	2.42

Nous constatons que pour l'harmonique $q=2$, l'inertie Ieq prend une valeur importante et au dessus de cette harmonique ($q > 2$) l'inertie reste pratiquement constante .

4.3 Calcul des paramètres du volant moteur accordé

Selon la formule relative à l'accord (13) , nous avons :

$$q = \left(\frac{RL}{L^2 + \frac{r^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

On peut écrire :

$$L^2 - LR/q^2 + r^2/2 = 0 \quad (\text{qui est une equation du 2e ordre en L})$$

les solutions en L sont données en fonction de l'harmonique q

$$L1 = \frac{R + \sqrt{R^2 - 2 q^4 r^2}}{2 q^2} \quad (15)$$

$$L2 = \frac{R - \sqrt{R^2 - 2 q^4 r^2}}{2 q^2} \quad (16)$$

- avec L : entraxe entre pendule et son logement
 R : position du logement par rapport à l'axe de rotation du volant support .
 r : rayon du pendule (rouleau)
 q : harmonique

Conditions à respecter :

- La première condition apparente est relative au discriminant qui doit être positif ou nul ;

$$\Delta = R^2 - 2q^4 r^2$$

donc $R^2 > 2q^4 r^2$

- La deuxième condition est le choix de l'une des solutions (15) ou (16) ;

Le rayon du pendule r est donné par SKF .

Dans le calcul de dimensionnement nous devons tenir compte de l'encombrement du moteur sur lequel est monté le volant (couronne dentée, plateau d'embrayage, vilebrequin), pour ce faire, nous sélectionnons une plage de valeurs pour les grandeurs R et r, en fonction des harmoniques, qui nous permettent de calculer :

- . la masse m du rouleau
- . le rayon Rp du perçage
- . l'entraxe L

On procède ensuite au calcul du moment d'inertie équivalent linéarisé du volant pendulaire, en donnant un intervalle de tolérance à R et L, que nous réajustons après avoir localisé les inerties effectives.

Premier choix :

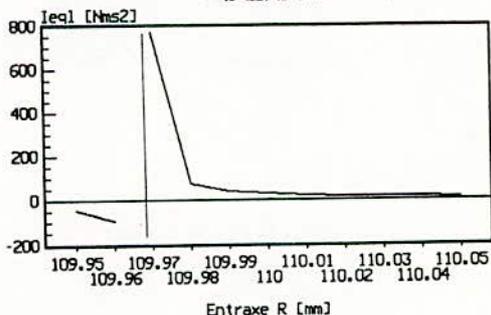
q = 2
 R = 110 mm
 r = 10 mm

paramètres calculés :

m = 48.5 g
 L = 25.5 mm
 Rp = 35.5 mm

La variation de l'entraxe R en fonction de l'inertie équivalente, dans l'intervalle de ± 0.05 est représenté par la figure 4.

Fig.4- Variation du moment d'inertie Ieq1 en fonction de R ($l=22.49$ mm)



Deuxième choix :

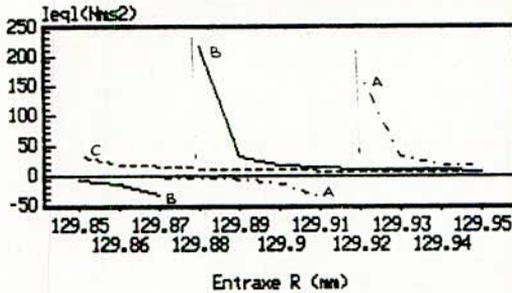
q = 2
 R = 129,90 mm
 r = 5,00 mm

paramètres calculés:

m = 31,00 g
 Rp = 37,07 mm
 L = 32.07 mm

La variation en fonction de R et L de l'inertie équivalente dans un intervalle de $\pm 0,05$ pour R et de $\pm 0,02$ pour L, est représenté par le graphe de la figure 5.

Fig. 5. Variation de l'inertie I_{eq1} en fonction de l'entraxe R (Pour $R/l=32.09$ $B/l=32.08$ $C/l=32.07$)



5. CALCUL EXACT DU MOMENT D'INERTIE EQUIVALENT I_{eqe}

Le moment d'inertie équivalent se présente sous la forme :

$$I_{eqe} = \frac{2T}{\theta^2} = I + m \frac{V_B^2}{\theta^2} + \left(\frac{\dot{\beta} + \dot{\theta}}{\theta^2} \right)^2 I_B$$

soit :

$$I_{eqe} = I + mR^2 + mL^2 \left(1 + \frac{\dot{\beta}}{\theta} \right)^2 + 2mRL \left(1 + \frac{\dot{\beta}}{\theta} \right) \cos \beta + I_B \left(1 + \frac{\dot{\beta}}{\theta} \right)^2$$

Si l'on pose $\beta = b \sin \omega pt$

$$\dot{\beta} = b \omega p \cos \omega pt = b q \Omega \cos \omega pt$$

$$\ddot{\beta} = -q^2 \Omega^2 \beta = -\omega_p^2 \beta$$

on aura :

$$I_{eqe} = I + mR^2 + (I_B + mL^2)(1 + bq \cos \omega pt)^2 + 2mRL(1 + bq \cos \omega pt) \cos(b \sin \omega pt)$$

5.1. Ieqe en fonction de R,r et L pour les dix premières harmoniques

Premier choix : R = 110.00 mm; r = 10.00 mm; L = 25.50 mm

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ieqe	2.552	2.553	2.553	2.555	2.557	2.559	2.562	2.566	2.571	2.577

Deuxième choix : R = 129.90 mm; r = 5.00 mm; L = 37.00 mm

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ieqe	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421	2.421

Nous constatons que l'inertie équivalente exacte Ieqe présente une faible variation en fonction des harmoniques q. En conclusion, on constate que les valeurs des inerties équivalentes linéarisées et exactes, présentent une grande similitude, ce qui justifie la linéarisation du système d'équations (3) et (4).

Cependant, nous constatons une dis—cordance pour l'harmonique q = 2 pour lequel l'inertie équivalente linéarisée prend une valeur importante. Cette discontinuité peut être exploitée pour élever l'inertie du volant, améliorant ainsi la régularité cyclique du moteur.

Afin d'optimiser le dimensionnement du volant pendulaire en fonction des paramètres : inertie-coût de production, nous avons retenus les dimensions suivantes.

$$R = 129.90^{+0}_{-0.05}$$

$$L = 32.07^{+0}_{-0.03}$$

$$r = 5^{+0.010}$$

$$Lwe = 45^{+0}_{-0.003}$$

Ceci nous permet d'avoir le domaine des inerties équivalentes suivant :

Tableau des inerties équivalentes en fonction de R et L :

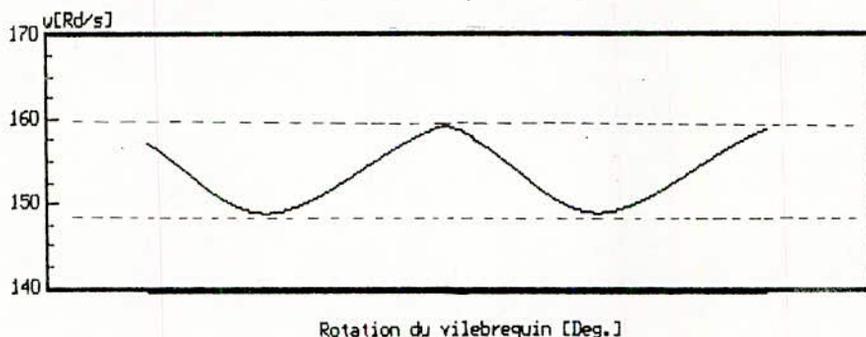
$R_{mm} \backslash L_{mm}$	32.04	32.05	32.06	32.07
129.85	4.846	4.668	8.646	31.090
129.86	4.673	4.841	7.617	17.414
129.87	4.522	5.042	6.882	12.573
129.88	4.392	5.279	6.328	10.098
129.89	4.275	5.565	6.896	8.592
129.90	4.172	5.914	5.551	7.582

6. VARIATION DE L'IRREGULARITE CYCLIQUE

A : Irrégularité cyclique avec volant classique :

En utilisant l'intégration du couple moteur, on arrive à calculer l'irrégularité cyclique du F4L 912, et par suite la détermination des vitesses angulaires pour chaque degré de rotation du vilebrequin, nous permet d'obtenir les variations de w en fonction de θ , représentées sur la fig.6 .

Fig.6 - Variation de la vitesse angulaire avec volant classique ($I=2.42 \text{ Nms}^2$)

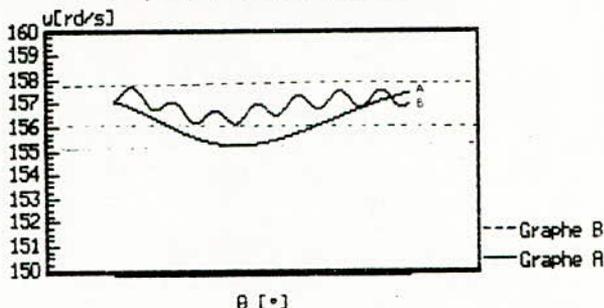


L'irrégularité du F4L 912 obtenue avec le cycle quazi-réel (en utilisant un volant classique) est de : $i = 0.07$.

B : Irrégularité cyclique avec volant pendulaire :

En utilisant les solutions des équations (1) et (2), nous obtenons la variation de w en fonction de θ , que nous visualisons sur la figure 7.

Fig.7. Variation de la vitesse angulaire
Graphe A : volant classique
Graphe B : volant pendulaire



L'irrégularité cyclique obtenu avec le cycle quazi-réel pour le moteur F4L 912 en utilisant un volant pendulaire est de :
 $i = 0.016$ (graphe B) .

Si nous utilisons un volant classique, ayant la même inertie que celle développée par le volant pendulaire (c'est à dire un volant 5 fois plus grand que le volant du F4L 912), nous obtenons une fluctuation de la vitesse angulaire supérieure à celle donnée par le volant pendulaire (graphe A).

7. CONCLUSION

De l'étude que nous venons de présenter découle deux constatations importantes .La première a trait à la régularité cyclique et nous permet d'affirmer que cette dernière est substantiellement améliorée par la substitution du volant classique par un volant pendulaire convenablement dimensionné

Ce degrés d'amélioration peut être extrêmement poussé et ne depend en fait que de certaines contraintes liées aux impératifs de fabrication. Ce qui nous amène d'ailleurs à l'idée d'optimiser le dimensionnement du volant pendulaire en fonction des paramètres inertie-coût de production .

La deuxième constatation a trait quand à elle ,à la présence de de cavités dans le corps même du volant ,ce qui contribue actuellement à diminuer le poids du volant .Cette diminution allège le moteur permettant par la même une augmentation non négligeable de la puissance utile fournie par le moteur. Ceci est obtenu avec un volant à trois pendules.

DIMENSIONNEMENT DES PISTONS DE MOTEURS
A COMBUSTION INTERNE

Par : M. BOUKABACHE C.C., B. CHOUCHAOU I Ing.

Département de Génie Mécanique
Laboratoire Mécanique de solide / E.N.P.

تليخيص :

تستهدف هذه الدراسة تحديد أبعاد المكبس بالنسبة للمحركات ذات الاحتراق الداخلي الرباعية الأشواط وذلك باستعمال الطرق المعتادة المعتمدة على التجربة، و الطرق الحديثة (العناصر المنتهية) و يتبع ذلك تطبيق على المحرك F 4 L 912 المصنوع بمعمل المحركات و الجرارات بقسنطينة .

ABSTRACT :

The purpose of this study is to size pistons of Diesel fourstroke in line engines, by classical method based on experimentation and modern one (finite elements method).

A particular application treats the F4L 912 engine, made by PMA/CMT.

RESUME :

Le but de cette étude est le dimensionnement des pistons pour moteurs Diesel à quatre temps en ligne, en utilisant les méthodes classiques (basée sur l'expérimentation) et moderne (éléments finis).

Une application est faite sur le moteur F4L 912, construit par PMA/CMT.

1. INTRODUCTION

Le moteur thermique est un organe qui transforme l'énergie calorifique -de combustibles- en travail mécanique, occupant de ce fait, une place de choix dans l'industrie des moyens de transport.

Le principe de fonctionnement des moteurs à combustion interne, est de transformer le déplacement alternatif du piston (dû à la pression des gaz dans la chambre de combustion et à l'inertie des pièces en mouvement), en un mouvement rotatif continu du vilebrequin.

2. METHODES DE CALCUL

2.1 Méthodes classiques

Le dimensionnement des éléments mobiles des moteurs thermiques à combustion interne, est très délicat, vu les impératifs discordants que doivent subir ces derniers.

Les méthodes de calcul classiques reposent sur l'étude de résistance des matériaux, corrigée par des relations empiriques, basées sur l'expérience née de la conjugaison de l'observation et du raisonnement.

2.2 Méthodes modernes

D'une façon générale, l'optimisation des formes des éléments à dimensionner peut faire appel aux méthodes de calcul numériques (par éléments finis,...), ainsi qu'aux approches réalisées par les méthodes expérimentales.

2.2.1 Méthodes de calcul numériques

Parmi ces méthodes, on utilise la méthode des éléments finis permettant de prédéterminer la répartition des températures, celle des contraintes et déplacements, qu'elles entraînent (par rapport à un système de coordonnées lié à la pièce)

Cette voie théorique procède par approximations successives, concernant:

- le mode de découpage ou maillage,
- la modification des formes dont on veut connaître l'influence.

Elle exige aussi de connaître expérimentalement:

- les conditions aux limites, avec principalement les coefficients de transfert thermiques aux parois,
- les propriétés du matériau aux différentes températures susceptibles d'être rencontrées.

2.2.2 Méthode expérimentale

Cette méthode permet au cours d'essais sur banc, dans des conditions bien déterminées:

- de mesurer principalement les températures en différents points de la pièce à dimensionner, et établir les diagrammes des charges appliquées,

- de vérifier par des tests appropriés, de fonctionnement en endurance, que les contraintes restent bien, à un niveau suffisamment bas.

3. CALCUL DU PISTON ASSEMBLÉ DU MOTEUR

Application au moteur F4L 912.

3.1 Méthodes classiques

3.1.1 Le piston

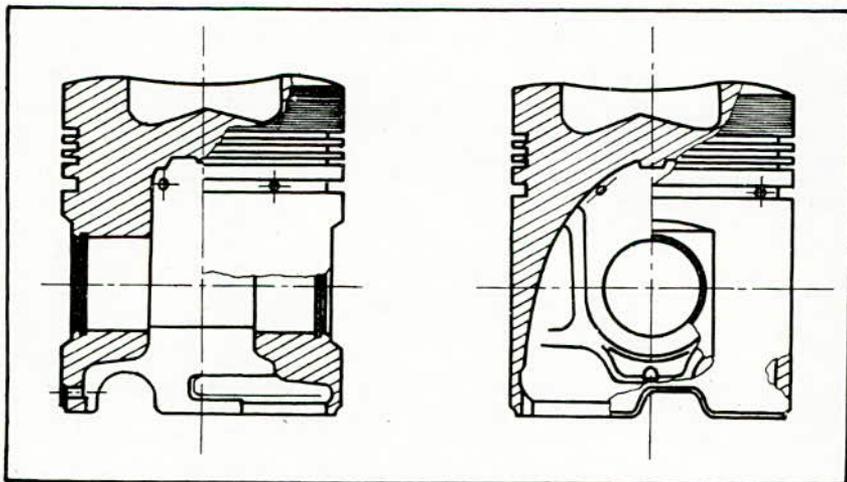


Figure 1: Piston du moteur F4L 912 (échelle 1/2).

a/ Dimensions générales:

Nous donnons dans ce qui suit, les dimensions générales d'un piston de moteur Diesel, à quatre temps, en alliage d'Aluminium-Silicium, tel qu'on l'envisage actuellement dans l'industrie, ainsi que celles proposées pour le piston du moteur F4L 912, rapportées au diamètre de l'alésage:

Dimensions	Rapports adoptés	Rapports adoptés dans l'industrie	Rapport du F4L 912
Diamètre de tête: D_t		$(1-0,007)D$	$0,995D$
Épaisseur du cordon de tête: E_{ct}		$0,2D$	$0,18D$
Diamètre du haut de jupe: D_{jh}		$(1-0,003)D$	$0,996D$
Diamètre de bas de jupe: D_{jb}		$(1-0,0015)D$	$1,0D$
Hauteur de jupe: H_j		$(0,9 \text{ à } 1)D$	$0,8D$
Hauteur d'axe: H_a		$(0,7 \text{ à } 0,8)D$	$0,46D$

b/ Vérification aux contraintes et déformations:

Contrainte et/ou Déformation	Elément			
	Tête	Porte segments	Bossages	Jupe
Contrainte de flexion max: σ_{fmax}	61,128MPa	---	2,701MPa	---
Contrainte de compression max: $\sigma_c max$	---	0,1056 MPa	---	---
Contrainte thermique max: $\sigma_{th max}$	26MPa	---	---	---
Pression spécifique max: $p_s max$	---	---	---	74daN/cm
Flèche max: f	0,0095mm	---	---	---

3.1.2 Les segments

Le nombre de segments dépend de la version du moteur, du type de segment et de l'alésage du cylindre. Pour le moteur F4L 912 nous avons, 3 segments d'étanchéité et 1 segment racleur.

Segments d'étanchéité:

Segment racleur:

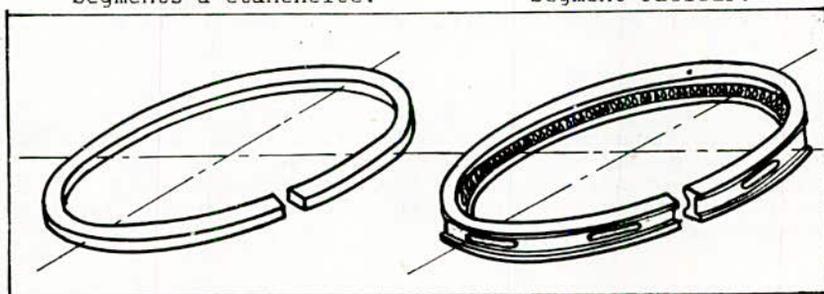


Figure 2: Segments du moteur F4L 912 (échelle 1/2).

a/ Dimensions générales:

Dimension	Rapports adoptés	dans l'industrie	pour le F4L 912
Epaisseur radiale e		(0,038 à 0,040)D	0,040D
Hauteur: h		(0,020 à 0,025)D	Etanchéité:0,025D Racleur:0,040D
Jeux:			
1er segment J1		(0,005 à 0,0075)D	Coup de feu:0,0035D
les autres J		0,003D (jamais inférieur à 0,3mm; jeu double pour le racleur	Etanchéité:0,0030D Racleur:0,080D

b/ Vérification aux contraintes et déformations:

Contrainte et/ou Déformation	Elément	
		SEGMENT
Pression du segment sur le cylindre		0,299 MPa
Contrainte dans un segment en place dans le cylindre		21,52 MPa
Contraintes lors de la mise en place du segment dans le cylindre		20,1 MPa

3.1.3 L'axe du piston

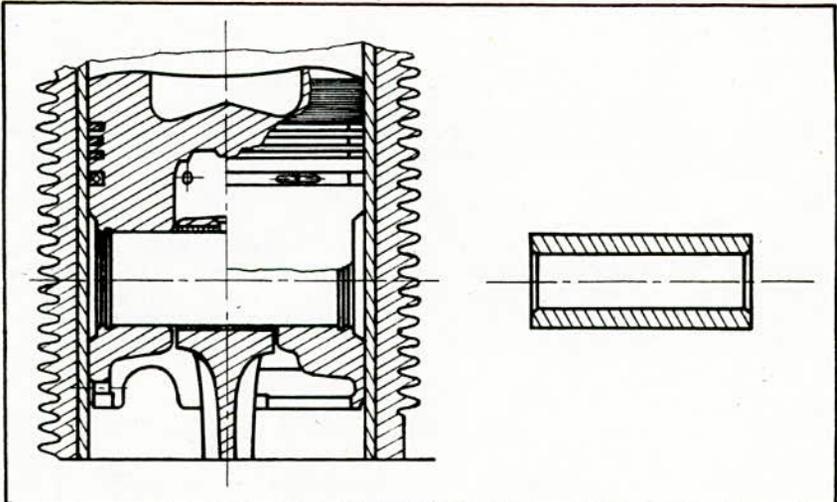


Figure 3: Axe du piston du F4L 912 (échelle 1/2).

a/ Dimensions générales:

Dimensions	Rapports adoptés	dans l'industrie	pour le F4L 912
diamètre de l'axe: d		(0,35 à 0,40)D	0,35D
Longueur de l'axe		(0,02 à 0,025)D	0,80D
Largeur de bielle: b		L/2,1	0,34D
Largeur totale: s		b + 2j	0,37D
		j étant le jeu latéral	

b/ Vérification aux contraintes et déformations:

Contrainte et/ou Déformation	Elément	AXE
Flèche maximale de l'axe: f		0,008mm
Ovalisation de l'axe: δ		0,002mm
Pression spécifique dans les bossages: ps		209daN/cm
Contraintes de flexion max de l'axe: σ_f max		44,37MPa
Contrainte d'ovalisation max de l'axe: σ_o max		126,84MPa
Contrainte idéale de l'axe: $\sigma_{idéale}$		134,41MPa

3.2 Méthodes modernes

3.2.1 Maillage

L'approche dimensionnelle du piston, des segments, et de l'axe du piston du moteur F4L 912, a porté sur l'utilisation du "SAP IV", programme industriel du département de Génie-Civil de l'université de Berkeley en Californie.

Ce programme aux éléments finis comprend plusieurs types d'éléments, et donne selon le maillage considéré, les valeurs des déplacements, et des contraintes ou sollicitations (efforts et moments), dont la composition basée sur une des hypothèses de résistance des matériaux, donne les contraintes résultantes dans les différents éléments.

a/ Le piston:

Le maillage du piston a été réalisé à l'aide de l'élément 8, de coques épaisses du SAP IV. Un tel élément peut posséder de 8 à 21 noeuds. Il peut prendre en compte un matériau orthotrope quelconque. Le chargement peut consister en des pressions appliquées sur la surface, des efforts hydrostatiques, des forces d'inertie dans les trois directions, et des efforts thermiques.

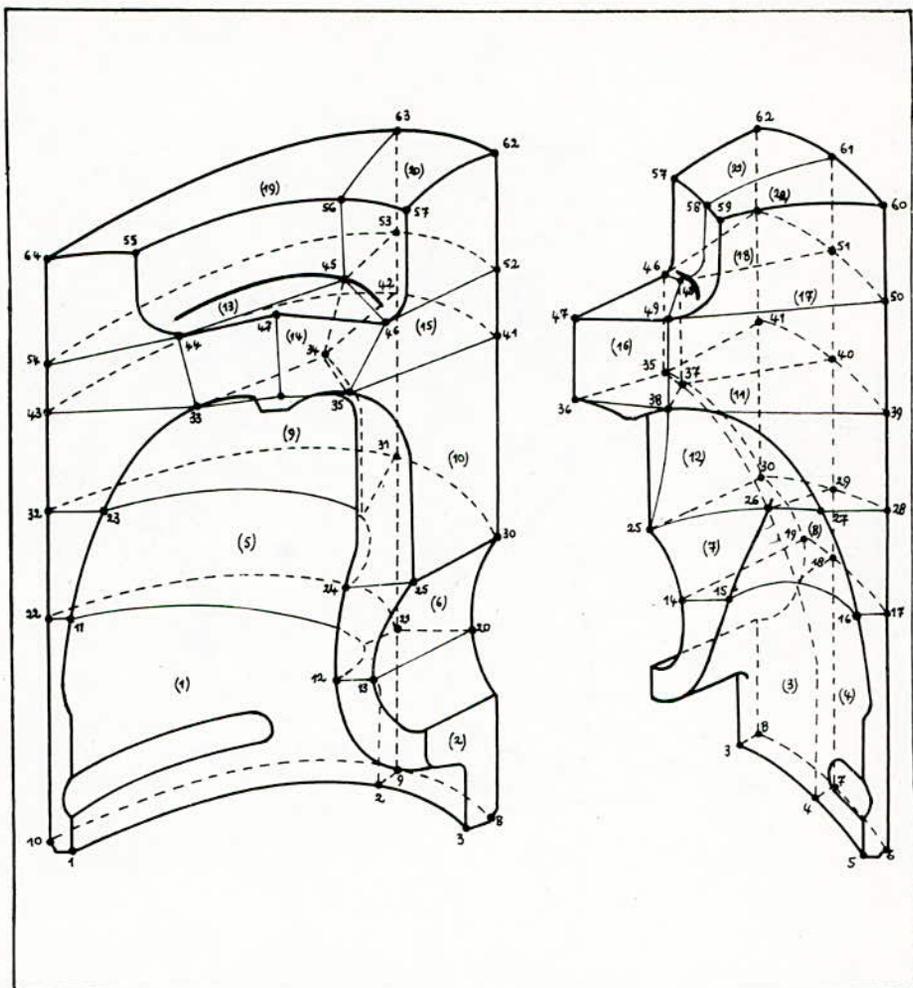


Figure 4: Maillage du piston du moteur F4L912 (1er modèle)

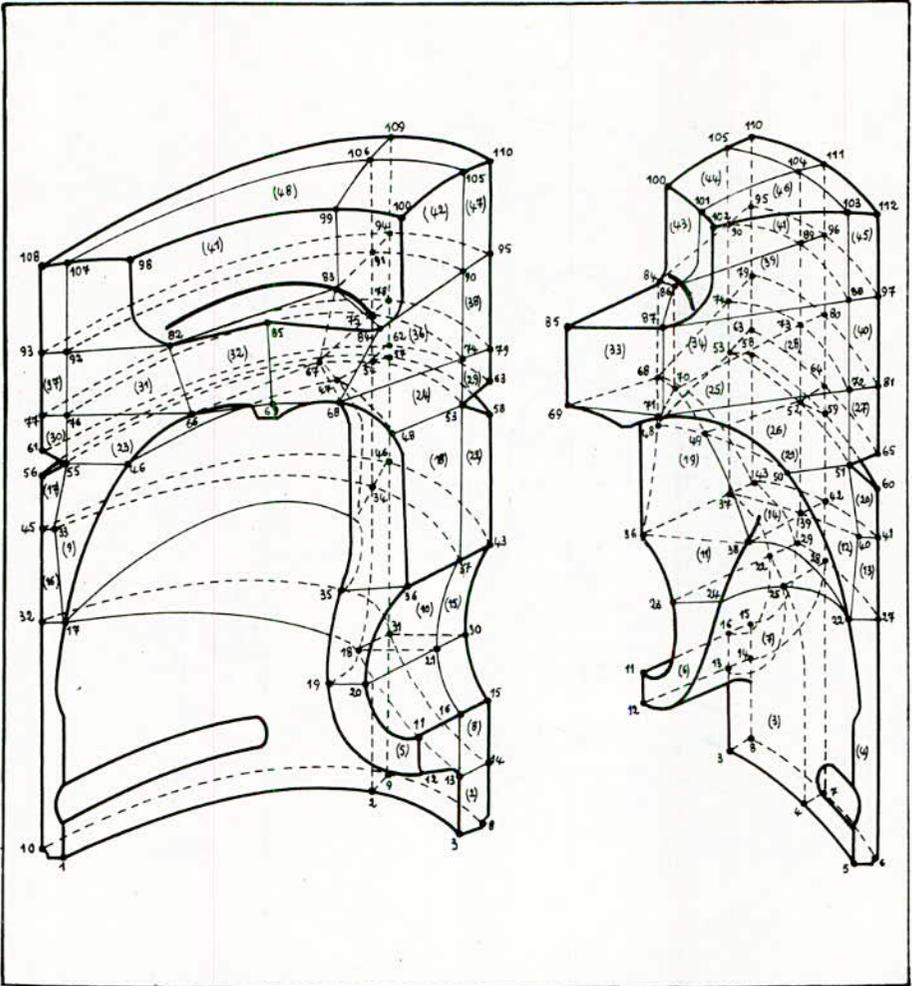


Figure 5: Maillage du piston du moteur F4L912 (2sd modèle)

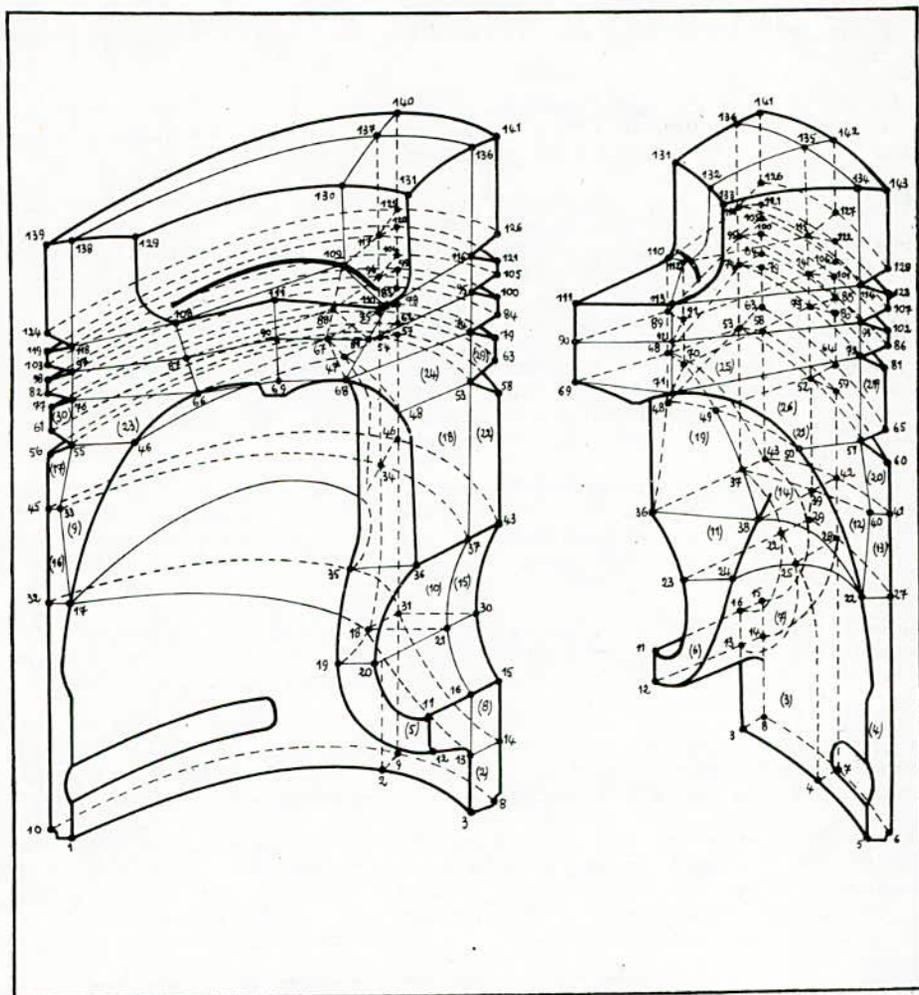


Figure 5: Maillage du piston du moteur F4L912 (3ème modèle).

Les résultats sont donnés sous forme de six contraintes globales qui peuvent être calculées jusqu'à sept endroits différents de l'élément.

Voulant faire une approche par convergence du maillage envisagé, nous avons jugé bon de faire plusieurs maillages, du grossier, au plus raffiné, dans un but de comparer les résultats.

Le piston du moteur F4L 912 présentant un plan de symétrie, son maillage a été effectué sur une moitié de structure, des conditions aux limites adéquates permettent de tenir compte de l'autre moitié. Le cas de chargement adopté considère la pression maximale des gaz en détente (donnée par le cycle réel relevé au niveau du labo moteur) ainsi que celle de la chemise sur la jupe (donnée par le programme SYNTHESE (6), partie étude dynamique), supposées uniformes. Les conditions aux limites considèrent les noeuds au niveau des bossages comme simplement appuyés, et limitent deux translations (selon X et Z) et deux rotations (autour de Y et Z), pour ceux du plan de symétrie.

Trois maillages du piston sont donnés par les figures 4, 5 et 6, la séparation en deux moitiés de chacun a été pratiquée dans le seul but d'une meilleure visualisation et compréhension du modèle

b/ Les segments:

Vu que les efforts de pression ne sont encaissés que par le segment de tête dit "segment coup de feu", nous ne vérifierons dans le cas du moteur F4L 912 que les dimensions de ce dernier, par la méthode des éléments finis.

Le maillage du segment est réalisé à l'aide des éléments solides axisymétriques par rapport à l'axe z. Les contraintes sont calculées au centre de l'élément et au milieu de chacun des côtés.

Le cas de chargement tient en compte la pression maximale des gaz en détente sur deux faces (face supérieure et celle latérale coté rainure). Les conditions aux limites bloquent la translation selon Y des noeuds de la face appuyée sur la chemise et selon Z pour ceux de la face appuyée sur la surface inférieure de la rainure.

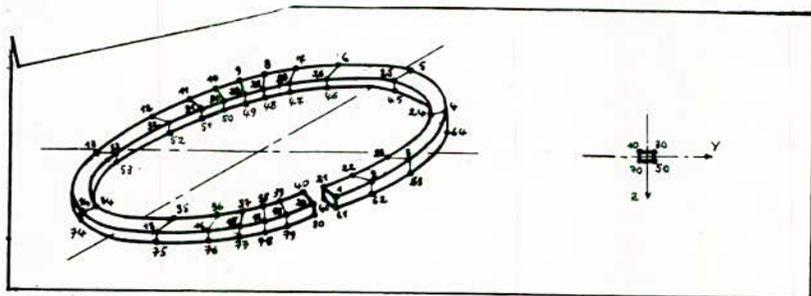


Figure 6: Maillage du segment coup de feu du moteur F4L912.

3.2.3 L'axe du piston

En ce qui concerne le maillage de l'axe, nous avons utilisé les éléments poutre, deuxième élément du SAP IV. Les forces (effort axial et effort tranchant) ainsi que les moments (moments de flexion et de torsion) sont calculés dans le système d'axes local de l'élément.

L'axe du piston présentant un plan de symétrie, nous n'avons considéré dans notre analyse qu'une moitié de structure. Le cas de chargement considère l'action des bossages supposée linéaire et homogène sur toute leur longueur. Les conditions aux limites supposent l'encastrement des extrémités.

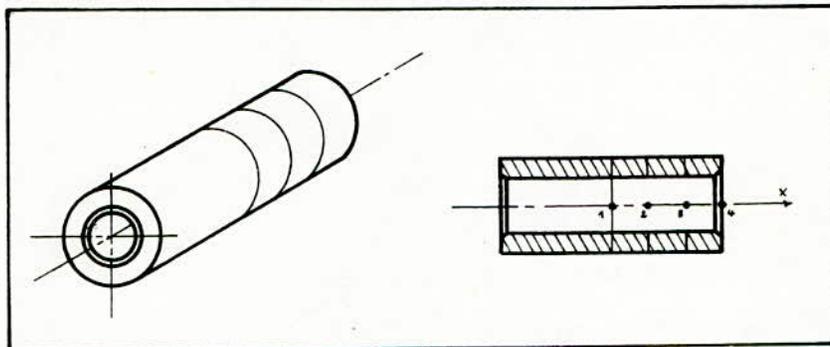


Figure 7: Maillage de l'axe du piston du moteur F4L912.

3.2.2 Résultats obtenus

a/ Le piston

Les résultats des contraintes et déplacements, au niveau de chaque point du maillage du piston du moteur F4L912, sont données en détail sur papier listing. Ces derniers étant en nombre élevé, nous avons jugé bon de ne donner que les résultats des points particuliers, et ceci dans le premier cas de maillage schématisé par la figure 4.

a.1/ Déplacements:

DEPLACEMENTS				
Nœud	Translation selon			Rotation autour
	X	Y	Z (en mm)	XX!YY!ZZ(en rd)
64	-0,16888E+00	0,00000E+00	-0,28764E+00	0,00000E+00
63	-0,16166E+00	0,64458E-03	-0,16298E+00	0,00000E+00
62	-0,16208E+00	-0,71248E-02	0,49887E-03	0,00000E+00
61	-0,16004E+00	0,63523E-03	0,38480E-01	0,00000E+00
60	-0,15805E+00	0,00000E+00	0,62068E-01	0,00000E+00
59	-0,16666E+00	0,00000E+00	0,22112E-01	0,00000E+00
58	-0,16980E+00	-0,35428E-02	0,69715E-03	0,00000E+00
57	-0,16880E+00	-0,68357E-02	0,60767E-02	0,00000E+00
56	-0,17332E+00	-0,31196E-02	-0,11880E+00	0,00000E+00
55	-0,17267E+00	0,00000E+00	-0,16626E+00	0,00000E+00
49	-0,11517E+00	0,00000E+00	-0,46431E-02	0,00000E+00
48	-0,11540E+00	-0,14194E-03	-0,11717E-01	0,00000E+00
47	-0,18796E+00	0,00000E+00	-0,61344E-01	0,00000E+00
46	-0,11655E+00	0,67957E-03	-0,76670E-02	0,00000E+00
45	-0,11523E+00	-0,19898E-03	-0,99255E-01	0,00000E+00
44	-0,11941E+00	0,00000E+00	-0,13819E+00	0,00000E+00
30	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
25	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
20	0,62457E-01	0,75548E-03	-0,34196E-01	0,00000E+00
13	0,59349E-01	0,15260E-02	-0,10655E+00	0,00000E+00

a.2/ Contraintes:

Pour les éléments les plus sollicités, nous avons noté:

CONTRAINTE (en MPa)					
ELEMENT	NORMALES	σ_x	σ_y	σ_z	
	TANGENTIELLES	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}	
6		0,947524E+01	0,729891E+01	0,217866E+01	
		0,197925E+00	0,606082E+00	0,160769E+01	
9		0,135807E+01	0,905809E+00	-0,198466E+01	
		0,291160E+00	0,219986E+00	0,122967E+01	
10		-0,154772E+01	-0,231607E+01	-0,152724E+02	
		0,292861E+00	0,583977E+00	0,200327E+01	
11		-0,282761E+01	-0,826245E+01	-0,158615E+02	
		0,229881E+00	0,696281E+00	-0,216195E+01	
12		-0,128810E+01	-0,124243E+01	-0,133949E+00	
		0,213309E+00	0,219871E+00	-0,650372E+00	
13		-0,277639E+01	-0,255620E+01	-0,920973E+01	
		0,727852E-01	0,257178E+00	0,102162E+01	
14		-0,159819E+01	0,638723E+01	0,143402E+00	
		0,145933E+00	0,137989E+01	0,151916E+01	
15		0,764718E+00	0,274525E+01	-0,124566E+01	
		0,691386E-01	0,579105E+00	0,196633E+01	
16		-0,244238E+01	-0,117648E+02	-0,455796E+02	
		0,144522E+00	0,158058E+01	-0,152135E+01	
17		-0,583637E+00	0,142737E+00	-0,678926E+00	
		0,628402E-01	0,245518E+00	-0,942422E+00	
18		0,153905E+01	0,214202E+01	-0,432107E+01	
		0,218948E-01	0,708442E+00	-0,202946E+01	
19		0,988674E+00	-0,167969E+01	-0,867091E+01	
		0,103827E-01	0,132635E+00	0,924537E+00	
20		0,353459E+00	-0,290155E+01	-0,719882E+01	
		-0,562768E-01	0,265914E+00	0,189965E+01	
21		0,114504E+01	-0,274888E+01	-0,683134E+01	
		0,113253E+00	0,867352E+00	-0,138950E+01	
22		0,997509E+00	-0,161343E+01	-0,313082E+01	
		0,715448E-01	0,158985E+00	-0,757623E+00	

a.3/ Contraintes équivalentes:

Les six contraintes globales ainsi obtenues doivent être groupées à l'aide de la formule de Von Mises (adoptée dans notre cas), pour donner les contraintes équivalentes.

Concernant les éléments les plus sollicités, on aura:

Elément	Contrainte équivalente(MPa)
6	14,179091
9	4,442762
10	14,319608
11	12,643289
12	1,765099
13	7,038734
14	14,694349
15	6,097977
16	39,681050
17	2,514008
18	8,121854
19	8,937967
20	8,071217
21	7,993803
22	3,953392

b/ Les segments:

Concernant les segments, nous ne donnons que les résultats relatifs à l'élément isoparamétrique situé à l'opposé de la coupe du segment coup de feu, dont les contraintes sont les plus élevées.

b.1/ Déplacements:

NOEUD	DEPLACEMENTS (en mm)	
	Selon y	Selon z
10	0,30113E+00	0,30031E+00
30	0,00000E+00	0,30113E+00
40	0,00000E+00	0,00000E+00
50	0,21891E+00	0,00000E+00

b.2/ Contraintes:

Concernant l'élément 10, les contraintes sont les suivantes:

Noeud situé	CONTRAINTE	
	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$
au centre de gravité	88,0	85,8
au milieu du côté 10-30	172,3	10,3
au milieu du côté 30-50	0,0	163,5
au milieu du côté 50-70	148,1	0,0
au milieu du côté 70-10	31,7	169,3

b.3/ Contraintes équivalentes:

L'état de contrainte étant plan, les contraintes équivalentes sont:

Noeud situé	CONTRAINTE EQUIVALENTE (MPa)
au centre de gravité	122,9
au milieu du côté 10-30	172,6
au milieu du côté 30-40	163,5
au milieu du côté 40-50	148,1
au milieu du côté 50-10	172,3

c/ L'axe du piston:

c.1/ Déplacements:

Noeud	DEPLACEMENTS				
	Translation (mm) selon			Rotation (rd) autour de	
	X	Y	Z (en mm)	XX	YY (en rd)
1	0,00000E+00		0,12362E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
2	0,00000E+00		0,64901E-02	0,00000E+00	0,43357E-08
3	0,00000E+00		0,20361E-02	0,00000E+00	0,87037E-03
4	0,00000E+00		0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
5	0,00000E+00		0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00

c.2/ Efforts :

ELEMENT	NOEUDS	Effort Axial	Effort Tranchant	
		N (N)	Ty (N)	Tz (N)
1	1 & 2	0,000E+00	(+/-)2,631E+04	0,000E+00
2	2 & 3	0,000E+00	(+/-)3,947E+04	0,000E+00
3	3 & 4	0,000E+00	(+/-)3,947E+04	0,000E+00

c.3/ Moments:

ELEMENT	NOEUD	Moment de torsion	Moment Flechissant	
		Mt (N.mm)	My (N.mm)	Mz (N.mm)
1	1 & 2	0,000E+00	0,000E+00	(+/-)5,920E+05
2	2 & 3	0,000E+00	0,000E+00	6,580E+04 3,289E+05
3	3 & 4	0,000E+00	0,000E+00	-3,289E+05 7,236E+05

c.4/ Contraintes:

c.4.1-Contrainte de cisaillement:

Pour une section cisailée de $637,7 \text{ mm}^2$, nous avons:

Elément	Contrainte de cisaillement (MPa)
1	(+/-) 41,26
2	(+/-) 61,89
3	(+/-) 61,89

c.4.2-Contrainte de flexion:

Pour un module d'inertie de $3\,941,67 \text{ mm}^4$, nous avons:

Elément	Contrainte de flexion (MPa)
1	(+/-) 150,19
2	16,69 & 83,44
3	-83,44 & 183,58

c.4.3-Contraintes équivalentes:

Les contraintes équivalentes, données par la somme géométrique des deux contraintes (τ_{cis} et σ_f), sont ainsi:

Elément	Contrainte équivalente (MPa)
1	155,75
2	64,10 & 103,89
3	103,89 & 193,18

4.COMPARAISON ET COMMENTAIRE:

4.1 Le piston

Les méthodes classiques appliquées au piston du moteur F4L 912 permettent de donner les contraintes et déformations de cet élément, sous l'effet de certaines sollicitations considérées séparément, dans des régions locales. Les valeurs obtenues des contraintes maximales locales sont bien inférieures aux valeurs admissibles du matériau constituant le piston.

Les méthodes modernes quand à elles sont nettement plus complètes. En effet, elles possèdent l'avantage de pouvoir calculer les déformations et les contraintes en tout point, noeud du maillage considéré. Ainsi on peut avec de telles méthodes, connaître avec plus d'exactitude les contraintes au niveau des concentrations de contraintes tel que au niveau des rainures, des bossages, des trous de graissage etc...

L'analyse de ces dernières montre que la couronne et principalement le centre de la tête sont les plus chargées. En effet, cette région du piston encaisse les efforts des gaz en détente.

Il est à noter aussi que la région des bossages est également chargée, vu qu'elle permet l'articulation du piston à la bielle.

4.2: Les segments:

Comme exposé ci-dessus, la méthode des éléments finis permet une analyse assez poussée du problème.

Elle permet de déterminer les déplacements des noeuds de la section considérée du segment étudié, ainsi que les contraintes au niveau du centre de gravité et des milieux des côtés de cette dernière.

Les résultats enregistrés données concernant la section la plus sollicitée, à savoir celle à l'opposé de la coupe, donnés par la méthode des éléments finis, sont voisins de ceux obtenus par les méthodes classiques et restent inférieurs aux valeurs admissibles

4.3 L'axe du piston

Ce qui est le plus important à signaler dans paragraphe est sans doute le fait que l'analyse classique suppose l'axe assez souple pour ne subir que des déformations élastiques et ne pas être sollicité par le cisaillement.

Ceci n'est pas vérifié par l'analyse moderne, ou on signale l'apparition de l'effort tranchant.

Mis à part cela, les contraintes équivalentes dans les deux méthodes sont assez proches et vérifient bien les conditions de résistance.

5. CONCLUSION

L'étude dont nous présentons le compte rendu, est une analyse dimensionnelle assez complète.

Elle permet de donner un aperçu sur la tâche délicate qu'est le dimensionnement des éléments constituant les moteurs thermiques à combustion interne, ainsi que son application particulière au moteur F4L 912.

Néanmoins, on tient à souligner que les méthodes expérimentales détiennent un rôle prépondérant. Elles permettent en effet de tester les pièces dimensionnées, en endurance.

ETUDE COMPARATIVE DE TROIS COMMANDES REVERSIBLES
DES MOTEURS A COURANT CONTINU

A.MAAZI et R.TAHMI

E C O L E N A T I O N A L E P O L Y T E C H N I Q U E

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
LABORATOIRE DE MACHINES ELECTRIQUES

Résumé :

Nous présentons une étude sur les trois commandes réversibles des moteurs à courant continu :

- à circulation de courant ,
- à logique de basculement ,
- à zone morte.

Cette étude est illustrée par des enregistrements d'inversions de la marche du moteur dans les trois cas de commande.

Enfin, nous ferons une comparaison entre ces trois types de commande du pont de vue : commande électronique, caractéristiques et performances dynamiques.

GLOSSAIRE

E	V	f.c.e.m du moteur.
i	A	valeur instantanée du courant de circulation.
I _{cm}	A	valeur moyenne du courant de circulation.
I ₁	A	valeur efficace du fondamental du courant du réseau.
I _m	A	courant absorbé par l'induit du moteur.
I _r	A	courant redressé.
I _{r1}	A	courant fourni par le pont 1 (redresseur).
I _{r2}	A	courant fourni par le pont 2 (onduleur).
L	H	inductance de l'induit du moteur.
L _c	H	self de limitation du courant de circulation.
L _t	H	inductance totale équivalente d'une phase du transformateur d'alimentation.
P	W	puissance active absorbée par le système.
P ₁	W	puissance active qui transite par le pont 1 (redresseur)
P ₂	W	puissance active qui transite par le pont 2 (onduleur)
Q	VAR	puissance réactive absorbée par le système.
Q ₁	VAR	puissance réactive qui transite par le pont 1 (redresseur).
Q ₂	VAR	puissance réactive qui transite par le pont 2 (onduleur).
N	tr/mn	vitesse du moteur.
R	Ω	résistance de l'induit du moteur.
Re	Ω	résistance totale équivalente du réseau d'alimentation
u	V	tension simple instantanée de l'alimentation.
U	V	valeur maximale de u.
uc	V	tension continue de commande.
uc ₀	V	tension de commande pour laquelle I _m =0.
ucc	V	tension de circulation.
ur	V	valeur instantanée de la tension redressée.
Um	V	valeur moyenne de la tension redressée.
U ₀	V	valeur moyenne de la tension redressée pour $\theta=0$.
U _{m1}	V	tension moyenne fournie par le pont 1 (redresseur).
U _{m2}	V	tension moyenne fournie par le pont 2 (onduleur).
U _m	V	tension aux bornes de l'induit du moteur.
ΔU_c	V	chûte de tension due à la commutation.
ΔU_d	V	chûte de tension directe aux bornes des thyristors.
ΔU_R	V	chûte de tension ohmique.
v	V	tension fournie par le déphaseur.
V _c	V	tension d'alimentation de l'amplificateur de courant.
$\pm V_{cc}$	V	tensions d'alimentation des amplificateurs opérationnels.
θ	°	angle d'amorçage des thyristors.
φ_1	°	déphasage de I ₁ par rapport à u.
T	N.m	couple moteur.
T _r	N.m	couple résistant.

IL1.....variable logique correspondant à I_{r1}.

IL2.....variable logique correspondant à I_{r2}.

ILc.....variable logique correspondant à la consigne.

G1.....variable logique correspondant aux impulsions du pont 1.

G2.....variable logique correspondant aux impulsions du pont 2.

Les thyristors utilisés sont des SKT 100 ayant pour caractéristiques :

- tension crête inverse..... $V_{MI} = 1.2kV$
- courant nominal continu..... $I_d = 100A$ à $85^{\circ}C$
- courant de maintien..... $I_H = 170mA$ à $25^{\circ}C$
- variation de tension..... $dV/dt = 1.5kV/\mu s$ à $25^{\circ}C$
- surintensité..... $I_m = 2.5kA$ à $25^{\circ}C$
- température maximale de la jonction.... $\theta = 130^{\circ}C$
- chute de tension..... $V_f = 1.6V$ à $I_d = 70A$
- temps d'extinction..... $t_{off} = 150\mu s$
- circuit de gâchette..... $P_{max} = 1W$
 $V_g = 3$ à $5V$
 $I_g = 170mA$

Plaque signalétique du moteur utilisé : $P_n = 2.2kW$
 $U_n = 110V$
 $I_n = 24A$
 $J_n = 0.95A$
 $N_n = 1800tr/mn$
excitation:indépendante

1-INTRODUCTION :

Le choix d'un système d'entraînement est tributaire des conditions d'emploi et des performances exigées : puissance, consommation, plage de réglage de la vitesse et sa valeur maximale, réversibilité (éventuellement) et coûts d'investissement.

Parmi les entraînements industriels, ceux du domaine de la métallurgie (laminoirs réversibles) exigent une réversibilité totale de fonctionnement. Elle est obtenue par des moteurs à courant continu alimentés par des convertisseurs réversibles commandés de façon adéquate, c'est à dire réversibles tant en tension qu'en courant.

Au début, l'entraînement réversible était assuré par le groupe Ward-Léonard qui est abandonné actuellement, au profit des convertisseurs statiques à commutation naturelle, grâce au développement de l'électronique de puissance.

En effet, les convertisseurs statiques surclassent le groupe Ward-Léonard du point de vue rendement, rapidité, bruit et coûts d'entretien et d'installation.

Les convertisseurs les plus utilisés sont les redresseurs montés en pont. /1/; /2/; /3/.

Cependant, les ponts de GRAETZ à thyristors constituent des alimentations continues variables qui ne sont réversibles qu'en tension (pont redresseur-onduleur), autrement dit, seule la tension est sujette au changement de signe.

Pour assurer, aussi, la réversibilité du courant, il est nécessaire d'avoir deux ponts de GRAETZ montés en tête-bêche. L'ensemble constitue un convertisseur réversible.

Le convertisseur réversible peut fonctionner selon trois modes définis par le type de commande des deux ponts:

- à circulation de courant,
- à logique de basculement,
- à bande, ou zone, morte.

Notre travail consiste en la réalisation des trois commandes réversibles de moteurs à courant continu et leur application à une seule machine. Nous ferons ensuite une comparaison de ces trois commandes du point de vue consommation d'énergie, commande électronique et performances dynamiques.

La réalisation des deux ponts de GRAETZ et tous les essais ont été effectués au Laboratoire de Machines Electriques du Département Génie Electrique de l'E.N.P.

2-COMMANDE REVERSIBLE A CIRCULATION DE COURANT :

Ce type de commande est caractérisé par le fait qu'un courant variable circule entre les deux ponts sans traverser l'induit du moteur.

Les deux ponts fonctionnent ensemble, l'un en redresseur et l'autre en onduleur. Ceci n'est possible que si les deux angles de retard à l'amorçage varient de façon symétrique par rapport à 90° et vérifient les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &= 180^\circ \\ 30^\circ &\leq \theta_1, \theta_2 \leq 150^\circ\end{aligned}$$

Nous avons donc:

$$U_{m1} = U_o \cos \theta_1$$

$$U_{m2} = U_0 \cos \theta_2 = U_0 \cos(180 - \theta_1) = -U_0 \cos \theta_1$$

$$U_{m1} = -U_{m2}$$

Les deux tensions redressées moyennes sont égales en valeur mais opposées en signes. /4/; /5/; /6/.

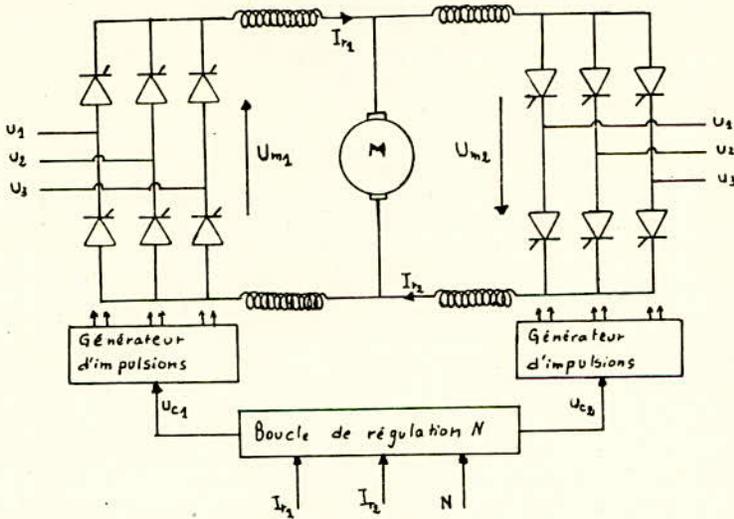


Fig.1 : schéma synoptique de la commande à courant de circulation.

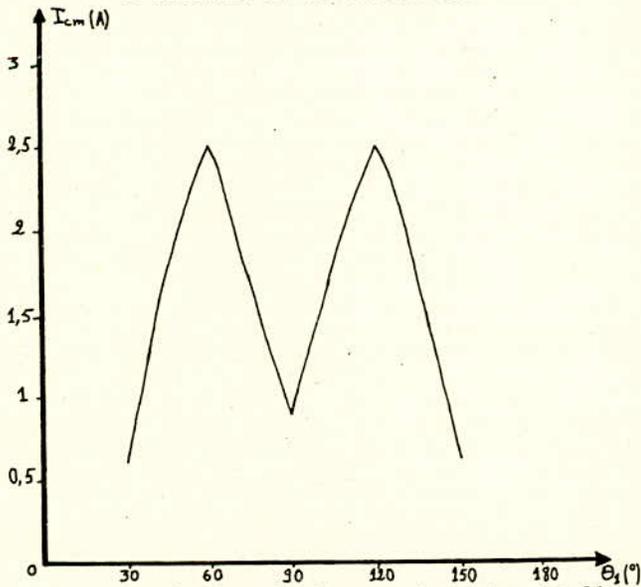


Fig.2: variation de I_{cm} en fonction de θ_1 .

Le courant de circulation résulte de la non-compensation des tensions redressées instantanées, il sera limité à une valeur égale à 10% du courant nominal par des inductances placées entre les convertisseurs, il est fonction des angles d'amorçage des deux ponts (fig.2). Les deux ponts étant complémentaires dans leur fonctionnement (de part et d'autre de $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$), la variation de ce courant sera donc symétrique par rapport à 90° . /8/; /9/.

2.1-Essais d'inversions: ces essais ont été effectués avec différentes valeurs de la tension d'alimentation, à vide et en charge.

La durée d'inversion est définie comme étant le temps nécessaire à la vitesse pour passer de +N à -N.

U_M/U_n	T. inv. N	T. inv. I_M	T. inv. N	T. inv. I_M
100%	4.6s	3.9s	2.4s	1.9s
	Fig3.a	Fig3.b	Fig4.a	Fig4.b
50%	3.8s	3.28s	760ms	700ms
	Fig5.a	Fig5.b	Fig6.a	Fig6.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.1 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle ouverte.

U_M/U_n	T. inv. N	T. inv. I_M	T. inv. N	T. inv. I_M
100%	5.6s	5.2s	3.6s	3.1s
	Fig7.a	Fig7.b	Fig8.a	Fig8.b
50%	4.5s	4.6s	3.4s	2.9s
	Fig9.a	Fig9.b	Fig10.a	Fig10.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.2 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle fermée.

Le moteur ayant une excitation constante, sa vitesse aura pour expression :

$$N = (U_M - R I_M) / k$$

elle ne dépend donc que de la tension et de la charge (I_M). Si la première diminue ou la seconde augmente, N diminue et, par suite, sa durée d'inversion.

Cependant, lors des inversions en boucle fermée, le limiteur du courant freine la croissance de la vitesse après l'inversion, ce qui en augmente la durée.

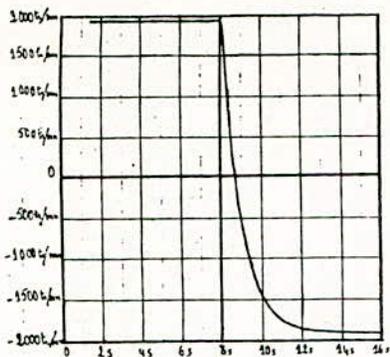


fig3.a:N à vide

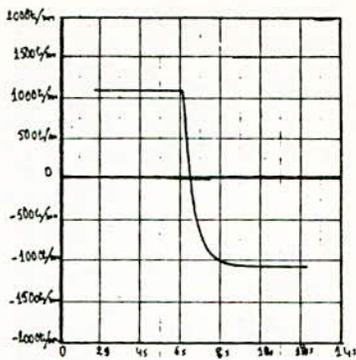


fig4.a:N en charge

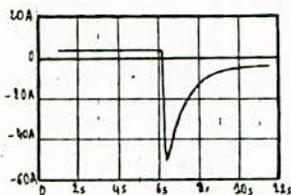


fig3.b:I_M à vide

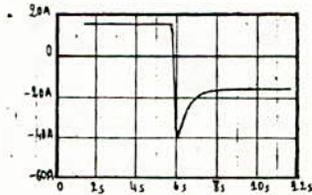


fig4.b:I_M en charge

Fig.3,4:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=100%Un)

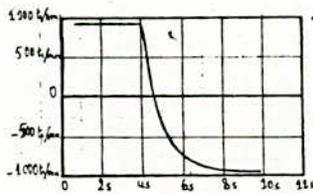


fig5.a:N à vide

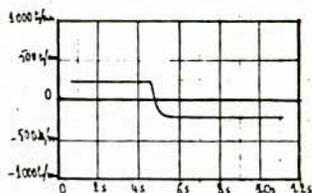


fig6.a:N en charge

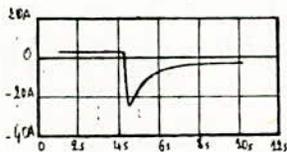


fig5.b:I_M à vide

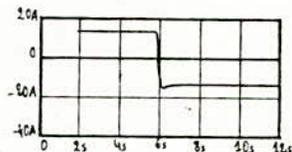


fig6.b:I_M en charge

Fig.5,6:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=50%Un)

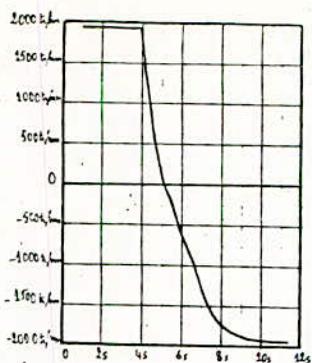


fig7.a:N à vide

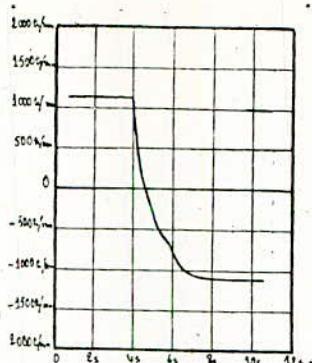


fig8.a:N en charge

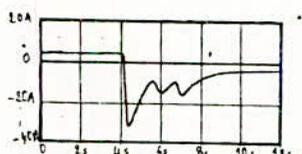


fig7.b:I_M à vide

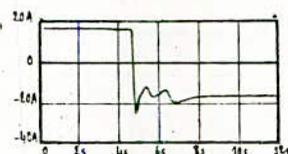


fig8.b:I_M en charge

Fig.7,8:inversions de N et de I_M en boucle fermée($U_M=100\%U_n$)

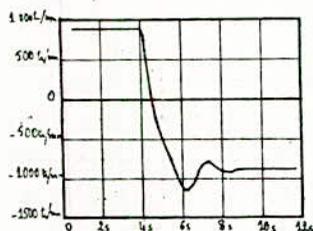


fig9.a:N à vide

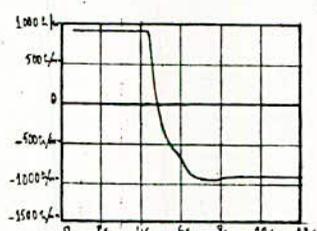


fig10.a:N en charge

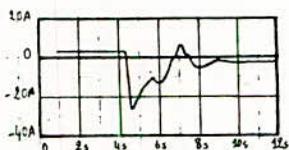


fig9.b:I_M à vide

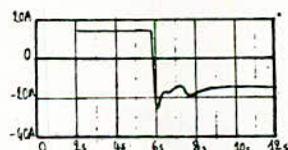


fig10.b:I_M en charge

Fig.9,10:inversions de N et de I_M en boucle fermée($U_M=50\%U_n$)

3-COMMANDE REVERSIBLE A LOGIQUE DE BASCULEMENT :

Contrairement à la commande précédente, celle-ci ne présente aucun courant de circulation. /6/; /9/.

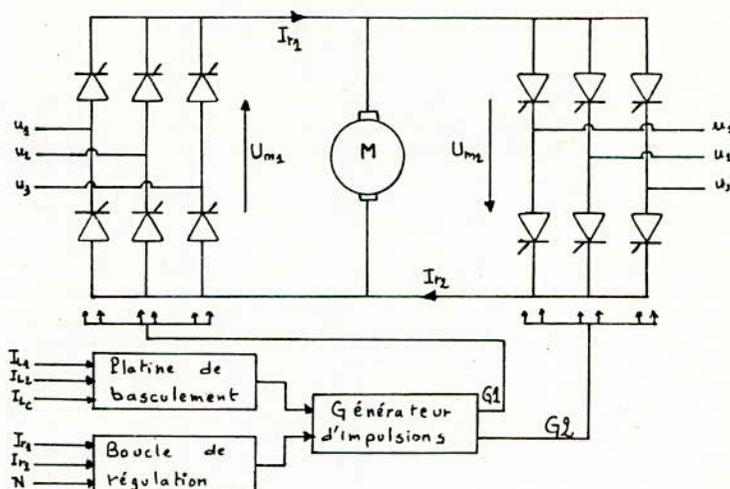


Fig.11:schéma synoptique de la commande à logique de basculement.

Un seul convertisseur fonctionne à la fois, le blocage de l'autre est assuré par la suppression des impulsions d'amorçage de ses thyristors.

Le fonctionnement du système est régi par les conditions suivantes :

- les deux ponts ne doivent pas fonctionner ensemble.
- le déblocage d'un pont est retardé par rapport au blocage de l'autre.
- l'ordre de basculement ou d'inversion est donné par un signal de consigne. /10/.

3.1-Circuit de basculement: les conditions énoncées précédemment dépendent de trois paramètres: I_{r1} , I_{r2} et la consigne. Nous avons donc huit cas possibles de fonctionnement décrits par la table de vérité suivante: /11/.

cas	1	2	3	4	5	6	7	8
IL1	0	1	0	1	0	1	0	1
IL2	0	0	1	1	0	0	1	1
ILc	0	0	0	0	1	1	1	1
G1	1	1	1	0	0	0	0	0
G2	0	0	0	0	1	1	1	0

Le niveau logique 1 (resp.0) correspond à la présence (resp.l'absence) du paramètre correspondant.

De la table de vérité, nous déduisons les expressions de G1 et de G2 suivantes:

$$G1 = \overline{ILc}(\overline{IL1} + \overline{IL2})$$

$$G2 = ILc(\overline{IL1} + \overline{IL2})$$

3.2-Essais d'inversions: ces essais ont été effectués dans les mêmes conditions que ceux effectués avec la commande précédente.

U _m /U _n	T.inv.N	T.inv.I _m	T.inv.N	T.inv.I _m
100%	1.8s	2s	1.5s	1.6s
	Fig13.a	Fig13.b	Fig14.a	Fig14.b
50%	3.3s	2.8s	1s	1s
	Fig15.a	Fig15.b	Fig16.a	Fig16.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.3 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle ouverte.

U _m /U _n	T.inv.N	T.inv.I _m	T.inv.N	T.inv.I _m
100%	5.6s	5.6s	6.1s	6.1s
	Fig17.a	Fig17.b	Fig18.a	Fig18.b
50%	7s	7.6s	5s	5.2s
	Fig19.a	Fig19.b	Fig20.a	Fig20.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.4 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle fermée.

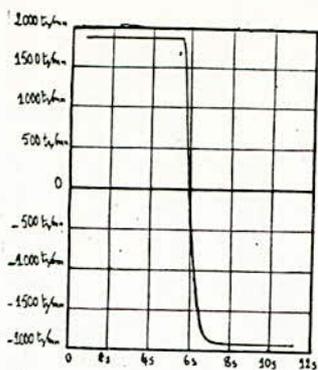


fig12.a:N à vide

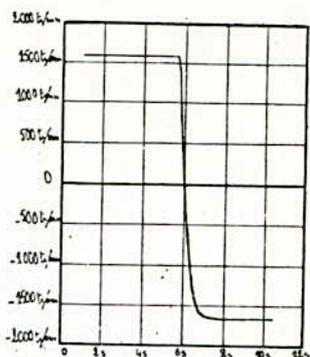


fig13.a:N en charge

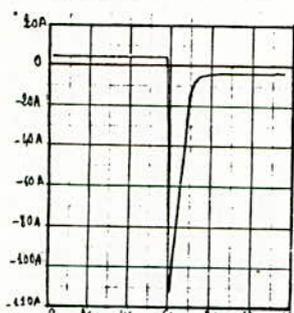


fig12.b:I_M à vide

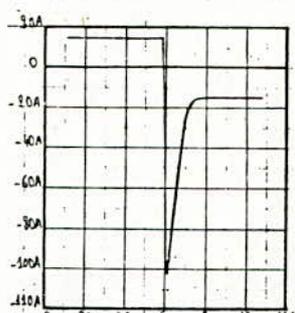


fig13.b:I_M en charge

Fig.12,13:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=100%Un)

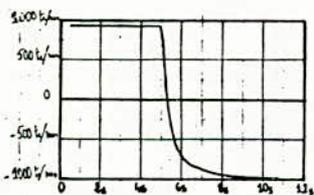


fig14.a:N à vide

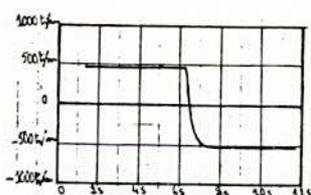


fig15.a:N en charge

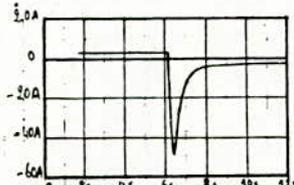


fig14.b:I_M à vide

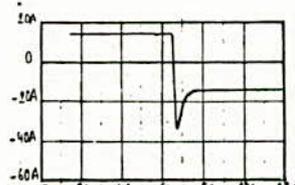


fig15.b:I_M en charge

Fig.14,15:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=50%Un)

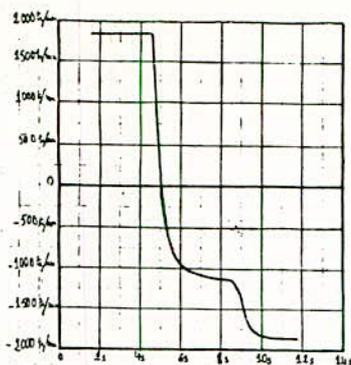


fig16.a:N à vide

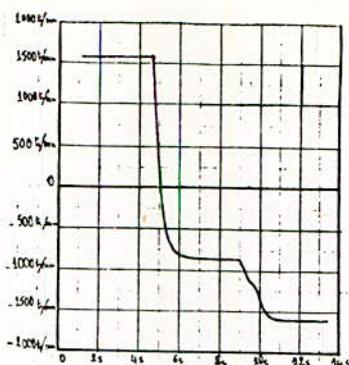


fig17.a:N en charge

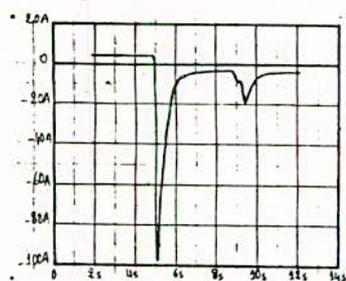


fig16.b:IM à vide

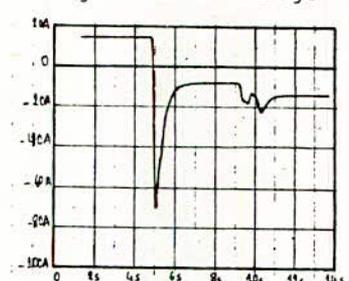


fig17.b:IM en charge

Fig.16,17:inversions de N et de I en boucle fermée($U = 100\%U_n$)

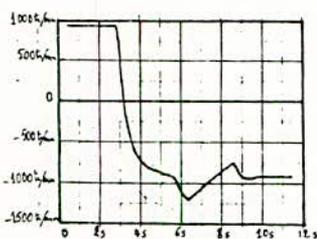


fig18.a:N à vide

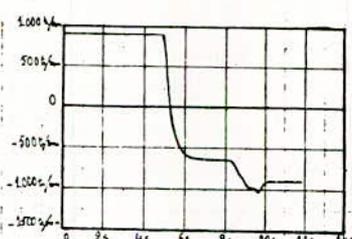


fig19.a:N en charge

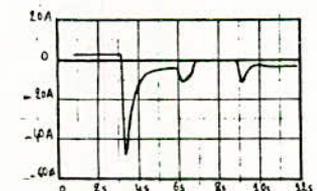


fig18.b:IM à vide

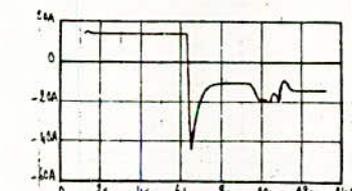


fig19.b:IM en charge

Fig.18,19:inversions de N et de IM en boucle fermée($U_M = 50\%U_n$)

Nous remarquons, qu'en fonction de la tension d'alimentation, ces durées augmentent à vide et diminuent en charge. Ceci s'explique par l'influence simultanée de la f.c.e.m du moteur et le gradient du courant (dI_M/dt). A vide, c'est ce dernier qui prédomine, en charge c'est la f.c.e.m.

4-COMMANDE REVERSIBLE A BANDE MORTE :

Le schéma synoptique de cette commande est exactement le même que celui de la commande à circulation de courant, les selfs de limitation en moins. Elle se situe, par son fonctionnement, entre les deux précédentes. Les deux ponts sont alimentés en même temps mais il n'existe aucun courant de circulation. /6/; /9/; /10/. Pour supprimer ce dernier, la somme des valeurs instantanées des tensions redressées doit être tout le temps négative par rapport au sens passant des thyristors qui fournissent le courant I_M . Ceci est obtenu en agissant sur θ_1 et θ_2 qui vérifient la relation suivante :

$$\theta_1 + \theta_2 \leq 2\theta_0$$

θ_0 étant l'angle pour lequel I_M est complètement nul.

Dans ces conditions: $15^\circ \leq \theta_1 \leq 120^\circ$ et $120^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$

donc

$$|\cos \theta_1| > |\cos \theta_2|$$

et

$$|U_{m1}| > |U_{m2}|$$

4.1-Essais d'inversion : ils ont été effectués dans les mêmes conditions que précédemment.

U_M/U_n	T. inv. N	T. inv. I_M	T. inv. N	T. inv. I_M
100%	1.6s	2.1s	1.5s	1.5s
	Fig21.a	Fig21.b	Fig22.a	Fig22.b
50%	3.4s	1.8s	1s	1.2s
	Fig23.a	Fig23.b	Fig24.a	Fig24.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.5 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle ouverte.

U_M/U_n	T. inv. N	T. inv. I_M	T. inv. N	T. inv. I_M
100%	4.4s	4.4s	5.6s	5.4s
	Fig25.a	Fig25.b	Fig26.a	Fig26.b
50%	3.4s	3.4s	4s	3.8s
	Fig27.a	Fig27.b	Fig28.a	Fig28.b
	A VIDE		EN CHARGE	

Tab.6 : durées d'inversion de la vitesse et du courant en boucle fermée.

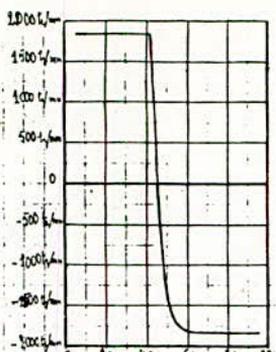


fig20.a:N à vide

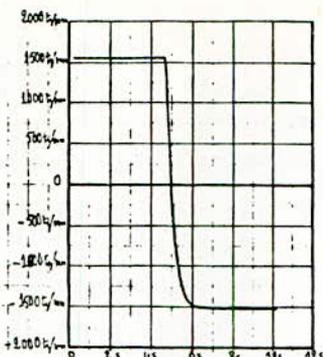


fig21.b:N en charge

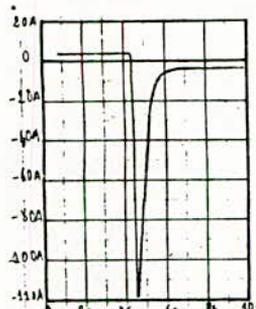


fig20.b:I_M à vide



fig21.b:I_M en charge

Fig.20,21:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=100%Un)

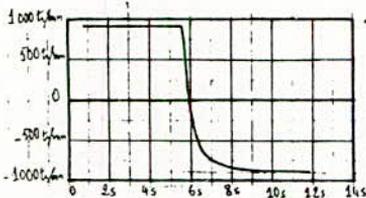


fig22.a:N à vide

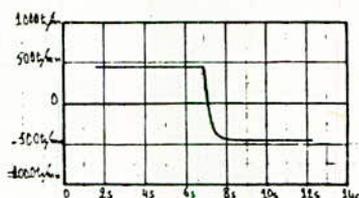


fig23.a:N en charge

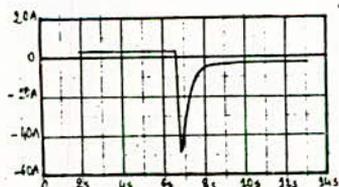


fig22.b:I_M à vide

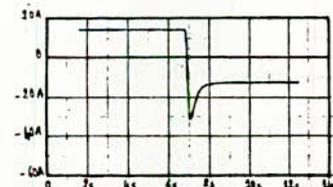


fig23.b:I_M en charge

Fig.22,23:inversions de N et de I_M en boucle ouverte(U_M=50%Un)

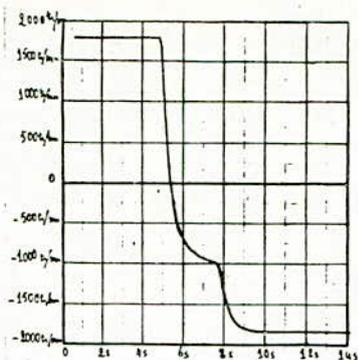


fig24.a:N à vide

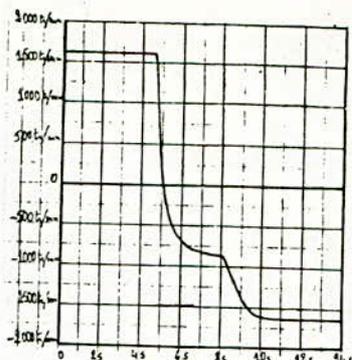


fig25.a:N en charge

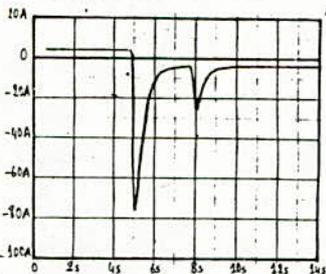


fig24.b:IM à vide

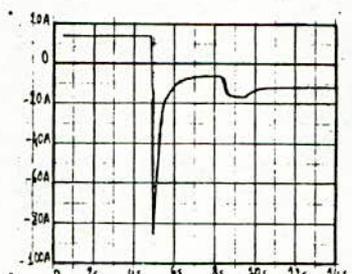


fig25.b:IM en charge

Fig.24,25:inversions de N et de I_M en boucle fermée($U_M=100\%U_n$)

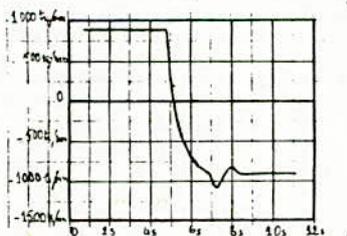


fig26.a:N à vide

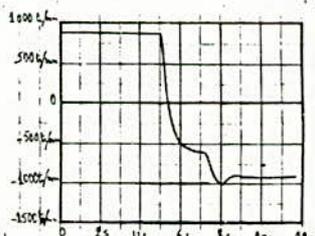


fig27.a:N en charge

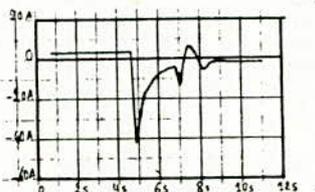


fig26.b:IM à vide

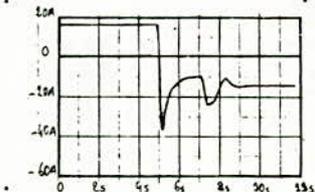


fig27.b:IM en charge

Fig.26,27:inversions de N et de I_M en boucle fermée($U_M=50\%U_n$)

Cette commande, de par son fonctionnement, se situant dans une position médiane par rapport aux deux précédentes, les variations des durées d'inversion obtenues dans ce cas s'apparentent à celles vues précédemment.

5-ANALYSE COMPARATIVE :

Cette analyse est faite à partir des points de vue suivants :

- commande électronique
- caractéristiques
- performances dynamiques

5.1-Commande électronique: la plus simple est celle de la commande à circulation de courant, vient ensuite celle de la commande à bande morte et, enfin, celle de la commande à logique de basculement.

5.2-Caractéristiques: nous avons relevé, pour différentes valeurs de l'angle d'amorçage θ_1 , les fonctions du courant I suivantes:

5.2.1- $U_M(I_M)$, fig28 : les courbes correspondant à la commande à circulation de courant ont une pente plus grande que celle des autres, elles ont l'allure de droites, ce qui n'est pas le cas des autres. Ceci est dû aux selfs de limitation et plus précisément leurs résistances qui introduisent une chute de tension supplémentaire qui s'accroît avec I_M .

En effet, nous avons pour la commande à circulation de courant:

$$U_M = U_0 \cos\theta - \Delta U_R - \Delta U_d - \Delta U_c - 2\Delta U_L$$

et pour les deux autres commandes:

$$U_M = U_0 \cos\theta - \Delta U_R - \Delta U_d - \Delta U_c$$

5.2.2-P(I_M), fig29: les courbes ont la même allure. Cependant, celles correspondant à la commande à circulation de courant se trouvent nettement au-dessus des autres, ceci provient des résistances des selfs de limitation qui introduisent des pertes Joule supplémentaires. La différence est très importante pour les forts courants.

5.2.3-Q(I_M), fig30: dans ce cas aussi, les courbes de la commande à circulation de courant se trouvent au-dessus car les selfs de limitation, toujours elles, provoquent une consommation supplémentaire d'énergie réactive.

5.2.4-N(I_M), fig31 : la pente des courbes correspondant à la commande à circulation de courant est plus grande (en valeur absolue) que celle des autres. En effet, la vitesse dépend de U_M , or celle-ci diminue très vite quand la charge du moteur augmente et, par conséquent, la vitesse qui suit les mêmes variations que la tension.

5.3-Performances dynamiques: les durées d'inversion obtenues avec les commandes à logique de basculement et à bande morte sont voisines entre elles et, en même temps, inférieures à celles obtenues avec la commande à circulation de courant. Ceci est, encore, l'effet des selfs de limitation de ce courant qui s'opposent à l'évolution du courant lors de l'inversion; or, c'est ce dernier qui produit le couple de freinage puis moteur après l'inversion.

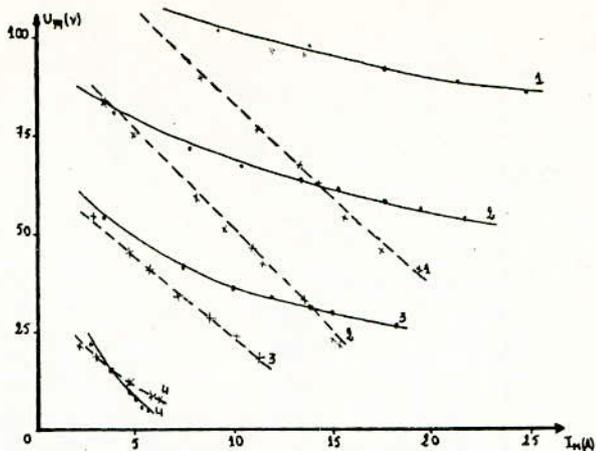


Fig.28 : variations de U_M en fonction de I_M pour différentes valeurs de θ_1 .

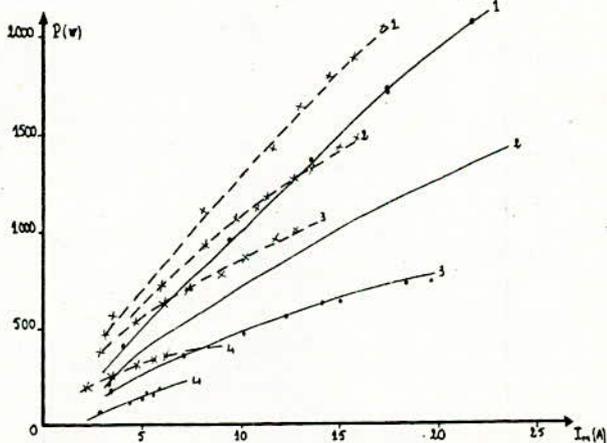


Fig.29 : variations de P en fonction de I_M pour différentes valeurs de θ_1 .

- - - - : commande à circulation de courant.
 ———— : commandes à logique de basculement et à bande morte.

courbes 1..... $\theta_1=30^\circ$
 courbes 2..... $\theta_1=45^\circ$

courbes 3..... $\theta_1=60^\circ$
 courbes 4..... $\theta_1=75^\circ$

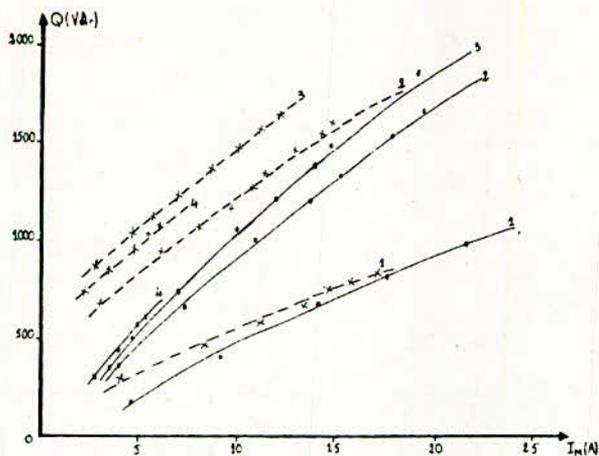


Fig.30 : variations de Q en fonction de I_m pour différentes valeurs de θ_1 .

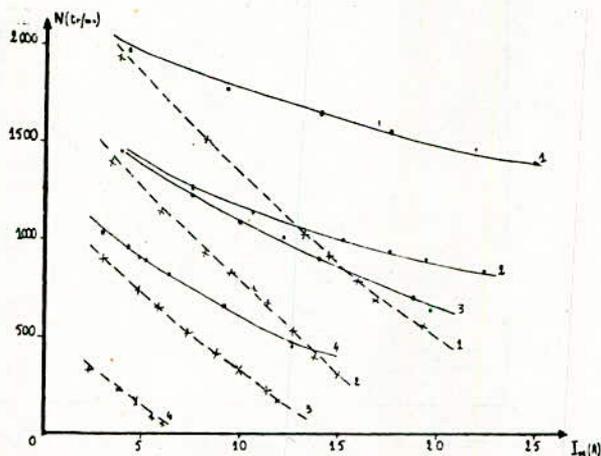


Fig.31 : variations de N en fonction de I_m pour différentes valeurs de θ_1 .

- - - - : commande à circulation de courant.

— : commandes à logique de basculement et à bande morte.

courbes 1..... $\theta_1=30^\circ$

courbes 3..... $\theta_1=60^\circ$

courbes 2..... $\theta_1=45^\circ$

courbes 4..... $\theta_1=75^\circ$

Après cette étude comparative, nous dressons le tableau suivant :

	com. à circ. de courant	com. à log. de basc.	com. à b. morte
encombrement	important	faible	faible
consommation P	très forte	normale	normale
consommation Q	très forte	normale	normale
commande électronique	très simple	complexe	simple
rapidité d'inversion	lente	rapide	très rapide
coût de l'installation	fort	moyen	faible
utilisation	faibles puissances	grandes puissances	grandes puissances

6 CONCLUSION :

Nous avons étudié et réalisé trois commandes réversibles des moteurs à courant continu alimentés par des convertisseurs statiques (ponts de GRAETZ à thyristors) et nous en déduisons les résultats suivants :

- la commande à circulation de courant: du fait de la présence des selfs de limitation du courant de circulation et de la limitation de la butée redresseur à 30° , cette commande présente une consommation excessive en puissances active et réactive, ce qui en affecte le facteur de puissance, il est donc nécessaire de surdimensionner le transformateur d'alimentation et les éléments de puissance.

De plus, la tension fournie au moteur et, par suite, la vitesse de ce dernier, diminuent très rapidement en fonction du couple disponible sur l'arbre du moteur.

Cependant, cette commande est assez simple mais ne peut être utilisée que pour les faibles puissances ($< 1 \text{ kW}$), les selfs assurant une perpétuelle continuité du courant redressé.

- la commande à logique de basculement: elle possède les mêmes caractéristiques que la commande non réversible. Du point de vue consommation et rigidité des caractéristiques, elle est meilleure que la précédente mais sa commande électronique est plus complexe. Ce type de commande peut être utilisé pour les puissances élevées.

- la commande à bande morte: elle, aussi, possède les mêmes caractéristiques que la commande non réversible et, donc, la commande à logique de basculement avec laquelle elle partage les avantages de consommation et de rigidité des caractéristiques. De plus, sa commande électronique est beaucoup plus simple. Elle peut être utilisée pour les grandes puissances.

Nous voyons donc que les deux dernières commandes réversibles sont proches l'une de l'autre du point de vue avantages et sont beaucoup plus pratiques que la première.

Le choix de la commande à utiliser demeure lié à l'ensemble des caractéristiques contenues dans le cahier de charge du système à entraîner.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ R.CHAUPRADE : "Commande électronique des machines électriques à vitesse variable".
Techniques de l'Ingénieur D541 Juin 1984
- /2/ J.DUCLERGET : "Commande et régulation des laminoirs".
Techniques de l'Ingénieur D846 Juin 1984
- /3/ LELAND.A.SCHLABACH : "Conduction limits of a three-phase controlled conveter in inversion".
IEEE.Trans. Ind. Appl. N°2 March/April 1986.
- /4/ G.JOOS and T.H.BARTON : "Four-quadrant d.c. variable speed drives-design considerations".
Proceedings of the IEEE. Dec 1975.
- /5/ PARESH.C.SEN and MURRAY.L.MAC.DONALD : "Thyristorized d.c drives with regenerative braking and speed reversal".
IEEE.Trans.Ind.Electron.Control.Instrum. N°4 Nov. 1978.
- /6/ H.BUHLER : "Electronique de puissance". Dunod 1981.
- /7/ R.CHAUPRADE : "Commande des moteurs à courant continu".
Eyrolles 1981.
- /8/ R.FISCHER and H.GEISSING : "Semiconductor rectifiers in circulating current".
Siemens Review N°8 Aug.1964.
- /9/ G.SEGUIER : "Les convertisseurs de l'électronique de puissance".Techniques et Docum. T1 1984.
- /10/ A.BUXBAUM : "Automatic changeover equipment for static convertor drives in anti-parallel conection without circulating current".
AEG Telefunken Progress N°4 1973.
- /11/ A.JOSSE : "Montages réversibles pour moteurs à courant continu commandés par l'induit".
Thèse de Doc.Ing. Toulouse 1965.

SYSTEME M/G/1/1 AVEC RAPPELS ET SERVEUR NON FIABLE

Aissani A., Université d'Annaba

RESUME.

On considère un système d'attente avec rappels constitué d'un serveur sujet à des pannes qui peuvent entraîner des interruptions de service (pannes totales) ou tout simplement une variation du régime de fonctionnement (pannes partielles). Ce type de système peut modéliser certains protocoles spécifiques à des réseaux de télécommunications du type LARN ("Local Area Computer Network). On obtient la condition d'ergodicité des processus décrivant l'évolution d'un tel système ainsi qu'une généralisation de la formule de Pollaczek-Khinchine pour la z-transformée.

Mots-clés. Réseaux de télécommunication, tolérance aux fautes, processus linéaires par morceaux, condition d'ergodicité, distribution stationnaire des états.

INTRODUCTION.

De nombreux problèmes liés à la transmission des données ont conduit à la conception de nombreux réseaux informatiques de nature diverses : réseaux locaux ou publics, réseaux satellites, réseaux numériques à intégration de service ... [17]. Les méthodes de résolution des conflits entre requêtes diffèrent selon la nature des unités d'échange (lignes de communications cablées, par image ...).

Dans les travaux d'Erlang [1] le processus de service est modélisé comme un système avec refus : l'abonné qui trouve la ligne occupée quitte le système pour de bon. Dans ce type de système il n'y a pas à proprement parler de "file d'attente" et c'est pourquoi khinchine [1] emploie le terme de "système de service en masse". La nécessité de tenir compte de l'attente de l'obtention de la communication a conduit à la notion de "file d'attente". Ce concept se propose de formaliser la résolution du conflit qui se produit lorsque plusieurs requêtes sollicitent une même ligne. En général on distingue trois types essentiels de discipline de résolution des conflits : FIFO (first in-first out), LIFO (last in -first out) et RANDOM [1]. Cependant l'intérêt pour la généralisation de l'outil informatique a stimulé l'introduction de nouvelles disciplines telles que le time-sharing [14]. Cohen [6] décrit une discipline originale de résolution du conflit typique aux systèmes de télécommunication : l'abonné qui trouve la ligne occupée renouvelle son appel jusqu'à l'obtention de la communication. Notons que ce système peut également modéliser d'autres processus d'attente tels que le service des avions à l'atterrissage dans un aéroport (c'est d'ailleurs pourquoi on dit parfois que l'abonné qui se trouve en régime de rappel est en "orbite" [5,6]) ou alors tout système pour lequel le client est découragé momentanément par le fait de trouver le service bloqué. Ce phénomène, très fréquent dans les réseaux de télécommunications utili-

sant une " bus architecture" (ou "local area computer network"), est décrit dans [12, 21] .

Alexandrov (1974) obtient la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre d'abonnés dans le système. La distribution de la durée d'attente est étudiée par Falin (1984), (1986) , et Kulkarni (1987)

La distribution de la période d'activité est analysée par Choo - Conolly (1979) . Kornichev (1977) étudie l'influence de la durée de l'établissement de la communication qui est généralement aléatoire et Shkolny (1977) donne une estimation de la probabilité de refus . Le système M/M/s/s a été étudié intensivement par Cohen qui ne donne cependant une solution analytique que pour M/M/1/1 . Des algorithmes récursifs sont proposés par Riordan 1962 , Keilson (1968) pour le calcul des probabilités des états en régime stationnaire. Une condition suffisante d'ergodicité est établie par Falin (1984) . Hanscke (1987) donne une expression simplifiée pour M/M/1/2.

Dans cet article, on s'intéresse à l'influence de la fiabilité de la ligne sur les caractéristiques du système pour deux types de modèle:

-Modèle I: la panne entraîne une interruption de service (panne totale); -Modèle II: la panne entraîne une simple variation du régime de fonctionnement (panne partielle).

2.FORMULATION MATHEMATIQUE. Soit un système constitué d'un serveur sujet à des pannes aléatoires qui peuvent se produire aussi bien lorsque le serveur est libre que lorsqu'il est actif (occupé par le service d'une certaine requête). Nous décrivons ci-dessous les différents processus qui se déroulent dans un tel système et nous définissons les lois de probabilité associées aux variables aléatoires (v.a.) paramétriques .

(i).Flot des appels . Les dates d'arrivées des clients dans le système (dates d'appels des abonnés) $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} \dots$ forment un flot simple d'évènements (i.e. ordinaire, stationnaire et sans post-actions) de taux $\lambda > 0$.

(ii).Flot des pannes. Soit $(\{f_n^0\}_{n \geq 1})$ et $(\{f_n^1\}_{n \geq 1})$ deux suites de v.a. indépendantes (v.a.i.) identiquement distribuées (i.d.) de fonction de répartition (f.r.) $F_n^j(x) = P(\{f_n^j\} \leq x) = 1 - e^{-\theta_j x}$, $\theta_j > 0$, $j=0,1$. La v.a. f_n^0 (resp. f_n^1) représente la durée de vie du canal jusqu'à une panne dont l'occurrence a lieu alors que le canal est inactif (resp.actif).

(iii).Processus de réparation. Soit $(z_n^j)_{n \geq 1}$, $j=0,1$ des suites de

v.a.i.i.d. de f.r. $R_j(x) = P(z_n^j < x)$, $R_j(0+) = 0$, $j=0,1$
 z_n^j représente la durée de réparation d'une panne qui se produit alors que le serveur est libre, si $j=0$ (resp. actif, si $j=1$). On admet que la réparation du serveur débute à l'instant qui suit immédiatement la panne.

(iv). Processus de service. Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de f.r. $H(x) = P(w_n < x)$, $H(0+) = 0$.
 w_n représente la durée de service de la n -ième requête.

(v). Flot des rappels. Si à la date t_n le service est bloqué (canal en panne ou communication en cours), alors l'abonné renouvelle son appel aux dates $t_n + n_1$, $t_n + n_1 + n_2$, La suite

$$\left(t_n + \sum_{i=1}^k n_i \right)_{k \geq 1}$$

forme un processus de renouvellement [Cox (1962)] de f.r.

$$P(n_j < x) = B_j(x), \quad j \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Le nombre d'abonnés renouvelant leurs appels (on dit qu'il se trouvent en régime de rappels [Alexandrov (1974)] ou en "orbite" [Choo (1979)]) est supposé illimité. De plus la f.r. $B_j(x)$ est la même pour tous les processus de renouvellement engendrés par les abonnés en "orbite" $B_k(x) = B(x) = 1 - e^{-vx}$, $x > 0$.

(vi). Nature des pannes. Supposons que durant le service d'une certaine requête le canal tombe en panne. Le service est alors interrompu (panne totale) durant un certain temps qui sera consacré à la réparation de la panne. Concernant la nature de ces interruptions nous distinguerons les cas où l'occurrence d'une panne entraîne:

CAS I. la perte momentanée de l'abonné qui entre en "orbite". Par

la suite son comportement ne diffère en rien de celui des abonnés qui se trouve déjà en régime de rappels .

CAS II. la perte définitive de l'abonné qui quitte le système.

CAS III. un nouveau service après réparation , avec conservation du service déjà acquis (pannes conservatrices).

CAS IV. idem, avec annulation du service acquis (pannes non conservatrices).

Il est évident que cette liste n'est pas exhaustive et que d'autres variantes peuvent être envisagées, en particulier des combinaisons de ces cas .

Dans ce qui suit , on s'intéresse aux processus de saut

$\{R(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ (nombre d'abonnés en "orbite" à la date t et

$\{A(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ (nombre d'abonnés dans le système à la date t.

2.1. Distribution du nombre d'abonnés en "orbite".

Soit $q_m(t) = P(R(t)=m)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in (t_0, \infty)$

la distribution de probabilité du processus $R(t)$. Notons par

$$Q(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(z^{R(t)}) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m q_m, \quad |z| < 1$$

la fonction génératrice de la distribution ergodique stationnaire du processus $R(t)$ (à condition qu'elle existe).

Soit $E(t)$ et $S(t)$ deux v.a. binaires indicatrices de l'état du canal et du service respectivement.

$$E(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est en bon état à la date } t \\ 1, & \text{s'il est en panne} \end{cases}$$

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à la date } t \\ 1, & \text{s'il est actif} \end{cases}$$

A chaque abonné dont l'appel a lieu à la date t_n et tel que

$$\min(E(t_n), S(t_n)) = 1,$$

on peut associer une v.a. b_n de f.r. $G_n(x)=G(x)=P(b_n < x)$ appelée "durée de séjour au sens faible" [Aissani (1983)]. Dans le cas des types (III) et (IV) de panne, b_n représente la durée de l'intervalle de temps (i.t.) qui s'écoule entre l'instant de début de service, jusqu'à l'instant où l'abonné quitte le système, son service étant terminé. Pour les types (i) et (ii) de pannes, la v.a. b_n admet une interprétation quelque peu différente (cf 2.5). Soient enfin les transformées de Laplace-Stieltjes :

$$g(s) = E(e^{-s b_n}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x)$$

$$h(s) = E(e^{-sw}) ; r_i = E(e^{-s z_i}) \quad i=0,1$$

qui convergent au moins dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$. Supposons dans une première étape que les pannes ne peuvent se produire que lorsque le serveur est libre. L'extension au cas où les pannes peuvent se produire lorsque le serveur est actif sera donnée dans le théorème 3 en vertu des considérations du §2.5.

Théorème 1. Si les fonctions $H(\cdot)$ et $R_0(\cdot)$ sont telles que :

$$(i) \quad h_1 = \int_0^{\infty} [1-H(x)] dx < \infty$$

$$(ii) \quad r_{01} = \int_0^{\infty} [1-R_0(x)] dx < \infty$$

$$(iii) \quad \rho = \lambda \int_0^{\infty} x dH(x) < 1 \quad (1)$$

$$(iv) \quad P\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty\right) = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

alors la distribution ergodique stationnaire du processus $R(t)$ existe et

$$Q(z) = p_0 \frac{1-z}{h(\lambda-\lambda z)-z} \left[1 + \frac{\theta_0 - \theta_0 r_0 (\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \right] \frac{K(z)}{K(1)} \quad (2)$$

$$K(z) = \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_0^z \frac{1-h(\lambda-\lambda y)}{h(\lambda-\lambda y)-y} dy + \frac{\theta_0}{v} \int_0^z \frac{1-r_0(\lambda-\lambda y)}{h(\lambda-\lambda y)-y} dy \right] \quad (3)$$

La constante p_0 représente la probabilité pour que le serveur soit disponible et vaut : $p_0 = (1-\rho)/(1+\theta_0 r_{01})$ (4)

Preuve. Introduisons le processus aléatoire suivant :

$$X(t) = \{ E(t), S(t), R(t); f(t) \}, \quad t \geq t_0 (= 0)$$

défini sur l'espace des phases $\Omega = \{0, 1\} \otimes \{0, 1\} \otimes \mathbb{N} \otimes \mathbb{R}^+$ où la composante $f(t)$ est une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^+ définie comme suit :

- si le serveur est disponible à la date t alors $f(t) = 0$;
- si $E(t)=0, S(t)=1$ alors $f(t)$ est la durée restante de service du client en cours ;
- si $E(t)=1$ alors $f(t)$ est la durée restante de réparation.

Le processus $X(t)$ décrit entièrement l'évolution du système au cours du temps. L'absence de la composante $f(t)$ pour $E(t)=0, S(t)=0$ s'explique par le caractère Poissonien du processus des pannes. Il est aisé de voir que le processus aléatoire $X(t)$ appartient à la classe des processus Markoviens linéaires par morceaux avec variations spontanées des états [Gnedenko(68)] . Sur la figure 1, les dates t'_i représentent les dates d'apparition de l'un des événements suivants: (A) appel; (B) rappel; (C) panne. A ces dates, la composante $f(t)$ perçoit un saut égal à la durée de service du client en cours (cas A ou B) ou à la durée

de réparation de la panne (cas C). Par la suite, la composante $f(t)$ décroît avec une vitesse égale à l'unité: $d f(t)/dt = -1$. Dès que $f(t)$ s'annule on observe une période d'inactivité du serveur de durée $a_1(i>1)$ qui est de loi exponentielle de paramètre $\lambda + \theta_0 + v_m$ si à la date T_0 où la composante $f(t)$ s'annule $f(T_0-0) > 0$, $f(T_0+0) = 0$ la valeur du processus $R(T_0+0) = m$. Les variations spontanées du processus $X(t)$ se produisent aux dates d'appels qui trouvent le service bloqué auquel cas la composante $R(t)$ perçoit un saut égal à l'unité. La probabilité d'un tel saut $P(R(t+h) = k+1 / R(t) = k, E(t) = 1 \text{ ou } S(t) = 1) = \lambda h + o(h)$

Soit
$$L(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } E(t) = 0, S(t) = 0, R(t) = 0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le processus $X(t)$ est un processus régénératif [Cox (1962)]. Les points de régénération du processus sont les dates d_n où $L(d_n-0) = 1$ et $L(d_n+0) = 0$. Soit $H(t)$ la fonction de renouvellement. Logiquement on a deux cas.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} > 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = 0$$

Du premier cas, il résulte que l'espérance mathématique de l'intervalle entre deux régénérations est finie $E(d_{n+1} - d_n) < \infty$. Selon le théorème ergodique de Smith pour les processus régénératifs [Ivtshenko (1982)], $X(t)$ admet une distribution ergodique de probabilité qui est stationnaire. De manière analogue à [Gnedenko (68)], on montre que dans les conditions du théorème, c'est le premier cas qui a lieu, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\left(\int_0^t L(t') dt'\right) > 0$$

Si par contre $\rho > 1$, alors la $P_X(t) = P(X(t) \in \Omega)$ est singulière. Dans les conditions du théorème, les probabilités stationnaires $P_X = \lim_{t \rightarrow \infty} P_X(t)$ des états du processus $X(t)$:

$$P_{00}(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(E(t)=0, S(t)=0, R(t)=m), \quad m \geq 0$$

$$P_{ij}(m, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(E(t)=i, S(t)=j, R(t)=m; \xi(t) < x)$$

existent et sont solutions du système d'équations différentielles

$$(\lambda + \theta_0 + \nu m)P_{00}(m) = \frac{dP_{10}(m, 0)}{dx} + \frac{dP_{01}(m, 0)}{dx} \quad (5)$$

$$\lambda P_{10}(m, x) = \alpha_{10}(m, x) + \theta_0 R_0(x)P_{00}(m) + \lambda(1 - \delta_{0m})P_{10}(m-1, x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda P_{01}(m, x) = & \alpha_{01}(m, x) + \lambda P_{00}(m)H(x) + \\ & + \nu(m+1)P_{00}(m+1)H(x) + \lambda(1 - \delta_{0m})P_{01}(m-1, x) \end{aligned} \quad (7)$$

où δ_{kl} est le symbole de Kronecker: $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kl} = 0$ si $k \neq l$.

et l'opérateur

$$\alpha_{ij}(m, x) = \frac{dP_{ij}(m, x)}{dx} + \frac{dP_{ij}(m, 0)}{dx}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Introduisons les fonctions génératrices partielles:

$$\begin{aligned} Q_{00}(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[z^{R(t)} / E(t)=0, S(t)=0] &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{00}(m), \\ F_{ij}(z, x) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{ij}(m, x), & \quad (ij) = (10) \text{ ou } (01) \end{aligned}$$

qui sont convergentes au moins dans le disque $|z| < 1$. De (5)-(7) nous obtenons:

$$(\lambda + \theta_0)Q_{00}(z) + \nu \frac{dQ_{00}(z)}{dz} = \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} + \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} \quad (8)$$

$$(\lambda - \lambda z)F_{10}(z, x) = \frac{\partial F_{10}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} + \theta_0 Q_{00}(z) R_0(x) \quad (9)$$

$$(\lambda - \lambda z)F_{01}(z, x) = \frac{\partial F_{01}(z, x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} + \lambda Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz} H(x) \quad (10)$$

Soient les transformées de Laplace:

$$f_{ij}(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F_{ij}(z, x) dx, \quad (ij) = (10) \text{ ou } (01), \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

En appliquant cet opérateur au système d'équations (8)-(10), on a

$$s(s - \lambda + \lambda z) f_{10}(z, s) = \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} - \theta_0 Q_{00}(z) r_0(s) \quad (11)$$

$$s(s - \lambda + \lambda z) f_{01}(z, s) = \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} - (\lambda Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz}) h(s) \quad (12)$$

Notons que la partie gauche de l'équation (11) s'annule pour $s = \lambda - \lambda z$. Puisque la fonction $f_{10}(z, s)$ est analytique par rapport à s dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$, alors la partie droite doit aussi s'annuler en ce point. C'est pourquoi

$$\frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} = \theta_0 Q_{00}(z) r_0(\lambda - \lambda z)$$

De la même manière

$$\frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x} = (\lambda Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz}) h(\lambda - \lambda z)$$

D'ici nous obtenons finalement:

$$f_{10}(z, s) = \frac{\theta_0 [r_0(\lambda - \lambda z) - r_0(s)]}{s(s - \lambda + \lambda z)} \cdot Q_{00}(z)$$

$$f_{01}(z, s) = \frac{h(\lambda - \lambda z) - h(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)} \left[\lambda Q_{00}(z) + v \left(\frac{dQ_{00}(z)}{dz} \right) \right]$$

D'autre part en vertu de (11) et (12), l'équation (8) devient:

$$\left\{ [1 - h(\lambda - \lambda z)] + \theta_0 [1 - r_0(\lambda - \lambda z)] \right\} Q_{00}(z) = v \{ h(\lambda - \lambda z) - z \} \left(\frac{dQ_{00}(z)}{dz} \right)$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire du premier ordre est de la forme:

$$Q_{00}(z) = k_0 \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_0^z \frac{1 - h(\lambda - \lambda y)}{h(\lambda - \lambda y) - y} dy + \frac{\theta_0}{v} \int_0^z \frac{1 - r_0(\lambda - \lambda y)}{h(\lambda - \lambda y) - y} dy \right]$$

où k_0 est une constante que nous déterminons plus loin. En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace [Doetsch (61)]:

$$Q_{ij}(z) = F_{ij}(z, \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{ij}(z, x) = \lim_{s \rightarrow 0} s f_{ij}(z, s)$$

nous obtenons:

$$Q_{10}(z) = \frac{\theta_0 [1 - r_0(\lambda - \lambda z)]}{\lambda - \lambda z} Q_{00}(z)$$

$$Q_{01}(z) = \frac{1 - h(\lambda - \lambda z)}{h(\lambda - \lambda z) - z} \left[1 + \frac{\theta_0 - \theta_0 r_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \right] Q_{00}(z)$$

Notons que: $q_m = q_{00}(m) + q_{10}(m) + q_{01}$ (13)

où

$$q_{ij}(m) = p_{ij}(m, \infty), \quad (ij) = (10) \text{ ou } (01), \quad m > 0 \quad (14)$$

et nous obtenons $Q(z) = Q_{00}(z) + Q_{01}(z) + Q_{10}(z)$ (15)

d'où la formule (2). En tenant compte du fait que $Q(1) = 1$,

$Q_{00}(1) = p_0$ et en utilisant la règle de l'Hospital dans l'expression (2) nous obtenons la formule (3) pour la constante p_0

2.2. Distribution du nombre d'abonnés dans le système. Les processus de saut $R(t)$ et $A(t)$ sont liés par la relation

$$A(t) = R(t) + S(t) \quad (16)$$

Il est clair que :

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t)=0) = q_{00}(0) + q_{10}(0) \quad (17)$$

$$a_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t)=m) = q_{00}(m) + q_{01}(m-1) + q_{10}(m), \quad m \geq 1 \quad (18)$$

En tenant compte de ces notations et en posant :

$$N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m a_m, \quad |z| < 1$$

nous avons:

$$N(z) = Q_{00} + Q_{10}(z) + zQ_{01}(z) \quad (19)$$

d'où:

$$N(z) = \frac{N'(z)}{1 + Q_{01}r_0} \left[1 + \frac{\theta_0 - \theta_0 r_0 (\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \right] \frac{L(z)}{L(1)} \quad (20)$$

$$L(z) = \exp \left[\frac{z}{v} \int_0^z \frac{1 - r_0 (\lambda - \lambda y)}{h(\lambda - \lambda y) - y} dy \right] \quad (21)$$

Dans l'expression (20), $N'(z)$ représente la fonction génératrice de la distribution stationnaire du processus $A(t)$ pour le système M/G/1/1 avec rappels et serveur absolument fiable et d'après [Alexandrov (1974)]

$$N'(z) = (1 - \rho) \frac{(1-z)h(\lambda - \lambda z)}{h(\lambda - \lambda z) - z} \frac{T(z)}{T(1)} \quad (22)$$

$$T(z) = \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_0^z \frac{1 - h(\lambda - \lambda y)}{h(\lambda - \lambda y) - y} dy \right]$$

Si on pose dans le théorème 1, $P(\xi_n^0 = \infty) = 1$, alors en vertu de

(20), $N(z)=N'(z)$ ce qui est conforme au résultat connu.

2.3. Caractéristiques moyennes. Les formules de Pollaczek-Khinchine

(2) et (20) permettent d'obtenir tous les moments désirés. En particulier, le nombre moyen d'abonnés dans le système vaut

$$M_1 = \left. \frac{dN(z)}{dz} \right|_{z=1} = M'_1 + \frac{\lambda}{v} \frac{\theta_0 r_{01}}{1-\rho} - \frac{r_{02}}{2(1+r_{02})}$$

où M'_1 est le moment d'ordre un correspondant au système avec serveur absolument fiable trouvé dans [Alexandrov (74)].

$$M'_1 = \rho + \frac{\lambda}{v} \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda}{2} \frac{h_2}{1+\theta_0 r_{02}}$$

Le nombre moyen d'abonnés qui se trouvent en orbite vaut:

$$O_1 = \left. \frac{dQ(z)}{dz} \right|_{z=1} = M_1 - \rho$$

D'autres caractéristiques en découle :

-le paramètre du flot engendré par les rappels: $\lambda_r = v O_1$

-le nombre moyen de rappels d'un seul et même abonné :

$$\lambda_r' = v O_1 / \lambda$$

-le nombre moyen de rappels lorsque le service est bloqué:

$$R_b = v \sum_{m=0}^{\infty} m(q_{10}(m) + q_{01}(m)) = v M_1 - \frac{\rho + \theta_0 r_{01}}{1 + \theta_0 r_{01}}$$

-le nombre moyen de rappels lorsque le canal est disponible:

$$R_d = v M_1 - R_b$$

-la probabilité pour qu'un abonné lors de son rappel trouve le canal disponible:

$$P_v = \frac{\lambda}{vM} \frac{\lambda + \theta_0 r_{01}}{1 + \theta_0 r_{01}}$$

Remarque. En vertu de la formule (4), la probabilité p_0 pour que

le canal soit disponible coïncide avec la probabilité correspondante pour le système classique M/G/1 avec file d'attente et serveur non fiable [Aissani (83)]. Cette propriété du système avec rappels découle du fait que tous les abonnés se trouvant en "orbite" seront tôt ou tard servis et nous sommes donc en présence d'une variante du système avec attente.

2.4. Pannes avec perte de l'abonné. Dans ce paragraphe, on se passe de la condition (iv) du théorème 1 i.e. $0 \leq P(\sum_n 1 = \infty) < 1$. On considère ici une combinaison des types (I) et (II) de pannes. Si une panne se produit durant le service d'une certaine requête, alors l'abonné en cours quitte le système avec une probabilité égale à p ou entre en "orbite" avec une probabilité $q=1-p$.

Théorème 2. Si $\rho = (\lambda/\theta_1) [1-h(\theta_1)] [1+\theta_1 r_{11} + q(\theta_1/)] < 1$ (23) alors la distribution ergodique stationnaire du processus $A(t)$ existe et elle est donnée par la formule (2), où $h(\cdot)$ est remplacé par la fonction $g(\cdot)$ qui vaut :

$$g(s) = h(s + \theta_1) + (\theta_1 / (\theta_1 + s)) (1 - qs/\lambda) r(s) [1 - h(s + \theta_1)] \quad (24)$$

Preuve. Si $\rho < 1$, alors les probabilités stationnaires des états du processus aléatoire $X(t)$ vérifient le système d'équations :

$$(\lambda + \theta_0 + v m) P_{00}(m) = \frac{dP_{10}(m, 0)}{dx} + \frac{dP_{01}(m, 0)}{dx}$$

$$\lambda P_{10}(m, x) = \alpha_{10}(m, x) + \lambda(1 - \delta_{0m}) P_{10}(m-1, x) +$$

$$+ \theta_0 P_{00}(m) R_0(x) + \theta_1 P_{01}(m, \infty) R_1(x) + \theta_1 q(1 - \delta_{0m}) P_{01}(m-1, \infty) R_1(x)$$

$$(\lambda + \theta_1) P_{01}(m, x) = \alpha_{01}(m, x) + \lambda(1 - \delta_{0m}) P_{01}(m-1, x) +$$

$$\lambda P_{00}(m) H(x) + v(m+1) P_{00}(m+1) H(x)$$

En conservant les mêmes notations que précédemment, nous avons

$$(\lambda + \theta_0)Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz} = \frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} + \frac{\partial F_{01}(z, 0)}{\partial x}$$

$$f_{10}(z, s) = \frac{(\partial F_{10}(z, s)/\partial x) - \theta_0 r_0(s)Q_{00}(z) - \theta_1(p+qz)Q_{01}(z)r(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)}$$

$$f_{01}(z, s) = \frac{(\partial F_{01}(z, 0)/\partial x) - (\lambda Q_{00}(z) + v(dQ_{00}(z)/dz))h(s)}{s(s - \lambda + \lambda z)}$$

En utilisant la propriété d'analyticité des fonctions $f_{10}(z, s)$ et $f_{01}(z, s)$, nous obtenons :

$$\frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} = \theta_0 r_0(\lambda - \lambda z)Q_{00}(z) + \theta_1(p+qz)r(\lambda - \lambda z)Q_{01}(z)$$

$$\frac{\partial F_{10}(z, 0)}{\partial x} = h(\theta_1 + \lambda - \lambda z)(\lambda Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz})$$

d'où

$$Q_{10}(z) = \lim_{s \rightarrow 0} s f_{10}(z, s) = \frac{\theta_0 - \theta_0 r_0(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} + (p+qz) \frac{\theta_1 - \theta_1 r_1(\lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} Q_{01}(z) \quad (26)$$

$$Q_{01}(z) = \frac{1 - h(\theta_1 + \lambda - \lambda z)}{\lambda - \lambda z} \left[\lambda Q_{00}(z) + v \frac{dQ_{00}(z)}{dz} \right] \quad (27)$$

De l'équation (25) et en tenant compte de (26), (27) nous avons :

$$Q_{00}(z) = k_0 K(z)$$

Le résultat du théorème découle alors de (19).

2.5. Durée de séjour au sens faible. Considérons le cas (i) où $q=0$. La fonction $g(s)$ définie par la relation (24) représente la transformée de Laplace-Stieltjes d'une v.a.b associée à une requête fixée C (que nous appelons durée de séjour au sens faible) et qui est définie comme suit :

a. Si durant le service de l'abonné le serveur n' est pas tombé en panne alors b coincide avec la durée de service w de la requête.

b. Si par contre durant le service le canal est tombé en panne, alors $b = w' + z_1$ où w' est la durée de service jusqu'à l'apparition de la panne et z_1 la durée de réparation qui s'en suit .

Ainsi , le système considéré est équivalent à un système dont le serveur ne peut tomber en panne que lorsqu'il est libre et dont la durée de service est une v.a. ayant pour f.r. $G(x) = P(b < x)$ de transformée de Laplace-Stieltjes $g(s)$. Cette propriété du système initial résulte du fait que pour les abonnés se trouvant en "orbite" (ainsi que pour ceux qui arrivent ultérieurement), peu importe quelle partie du temps est consacrée au service effectif des requêtes et quelle partie est consacrée à la réparation du serveur. Ce qui importe, c'est au bout de combien de temps le serveur sera apte à entamer le service de la requête suivante. Cette remarque reste valable pour les pannes de nature conservatrices et non conservatrices (cas (I) et (II)) où cette fois la v.a. b représente la durée effective de séjour de l'abonné auprès du serveur, c'est-à-dire la durée de l'i.t. qui s'écoule entre l'instant de début de service jusqu'à l'instant où l'abonné quitte le système son service étant achevé. Pour les pannes conservatrices, si durant le service de la requête il y a eu M pannes, alors [Gaver (62)]:

$$b = w + \sum_{i=0}^M z_1(i)$$

où $z_1(i)$ est la durée de temps nécessaire à la réparation de la i-ème panne. En tenant compte du fait que les v.a. $z_1(i)$ sont des v.a.i.i.d. nous obtenons :

$$g(s) = h(s + \theta_1 [1 - r_1(s)]) \quad (28)$$

De la même manière, pour les pannes non conservatrices :

$$b = w + \sum_{i=0}^M w'(i) + \sum_{i=0}^M z_1(i)$$

où $w'(i)$ est la durée potentielle de service précédant la i -ème panne.

Dans ce cas,

$$g(s) = h(s + \theta_1) \left\{ 1 - \frac{\theta_1}{s + \theta_1} [1 - h(s + \theta_1) r_1(s)] \right\}^{-1} \quad (29)$$

Les conditions d'ergodicité dans ces deux derniers cas sont de la forme [Aissani (83)]

$$(iii) \quad \rho = \lambda [1 + \theta_1 r_{11} h_1] < 1 \quad (30)$$

$$(iv) \quad \rho = \lambda (1 - h(\theta_1)) h(\theta_1)^{-1} (r_{11} + \theta_1^{-1}) \quad (31)$$

Ainsi dans le cas où les pannes peuvent se produire lorsque le canal est actif les résultats précédents peuvent être réunis dans le théorème suivant.

Théorème.3 Supposons que la v.a. b ne dépende pas des événements précédants le service d'un certain client, sachant que le service a débuté à une date donnée. Soit $g(s)$ la transformée de Laplace-Stieltjes qui est donnée selon le cas par les formules (24), (28), (29). Alors la condition nécessaire et suffisante d'existence de la distribution ergodique du processus $X(t)$ est de la forme

$$\rho = \lambda E(b) < 1 \quad (32)$$

où $E(.)$ désigne l'opérateur espérance mathématique. L'inégalité (32) selon le cas prend la forme (1), (23), (30), (31). Si cette condition est remplie, alors la fonction génératrice de la

distribution ergodique stationnaire du processus $A(t)$ est donnée par la formule (2) où $g(s)$ prend la forme correspondante au type de panne .

Remarque. Pour des raisons de commodité, nous avons admis que la f.r. $H_1(x)$ était exponentielle. En fait, tous les résultats obtenus restent valables dans le cas d'une f.r. $H_1(x)$ arbitraire. Il suffit de remplacer là où c'est nécessaire θ_1 par l'inverse de la durée moyenne de réparation

$$r_{11} = \int_0^{\infty} x dR_1(x) < \infty$$

Les expressions des fonctions $g(s)$ dans ce cas sont établies dans [Aissani (1983)] .

3. PANNES PARTIELLES

Considérons l'interprétation " énergétique " du service [Gnedenko (1968)] et admettons que pour assurer le service du n -ième client il est nécessaire de fournir une certaine quantité de travail w_n , $n \geq 1$.

Les variables aléatoires $(w_n)_{n \geq 1}$ sont des v.a.i.i.d.

$$H(x) = P(w_n < x)$$

Soit $E(t)$ la puissance du serveur à la date t . Nous admettons que le serveur possède n régimes de fonctionnement i.e. $E(t)$ est un processus de saut défini sur l'espace des phases

$\Omega_n = \{0, 1, \dots, n\}$. A l'état i , le serveur possède la puissance E_i .

Le processus de service est défini par la loi d'évolution de la puissance au cours du temps. Soit $Q = \|q_{ij}\|_{n \times n}$ le générateur des transitions du processus $E(t)$,

$$q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} P(E(t+h) = j / E(t) = i)$$

Notons que si la puissance est constante $E(t) = E$ alors nous obtenons

nous le système classique avec rappels [4,5] pour lequel la f.r. de la quantité de travail à fournir vaut $H(Ex)$. Cette position du problème englobe aussi le cas du système avec rappels et serveur non fiable [2,3]. En effet dans ce cas il suffit de considérer que la puissance s'annule dès qu'une panne se produit. A un serveur en bon état correspond une puissance non nulle.

FORMULATION DES RESULTATS.

La dynamique d'évolution du système est entièrement décrite par le processus aléatoire:

$$X(t) = \begin{cases} \{E(t), R(t)\} & \text{si } S(t)=0 \\ \{E(t), R(t); f(t)\} & \text{si } S(t)=1 \end{cases}$$

où $S(t)$ est la v.a. binaire définie au §2.1. ; la v.a. $f(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ représente la quantité de travail résiduelle pour le service de la requête en cours. Le processus $X(t)$ défini sur l'espace des phases

$$\Omega = \mathbb{N}_n \otimes \mathbb{N}_\infty \otimes \mathbb{R}^+$$

est un processus Markovien linéaire par morceaux à variations spontanées des états.

Théorème 4. [3]. Si

(i) (w_n) est une suite de v.a. indépendantes,

$$h_1 = \int_0^\infty x dH(x) < \infty$$

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} P(e(t+h)=j/e(t)=i) > 0$ (1)

alors la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité du

processus $X(t)$ est:

$$\lambda \int_0^{\infty} x dH(x) < \sum_{i=1}^n p_i E_i \quad (2)$$

où
$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P(E(t) = i) \quad (3) \quad \blacksquare$$

Soit $R(t)$ le nombre de clients en "orbite" à la date t et

$$Q(z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P(R(t) = m)$$

la fonction génératrice de la distribution de probabilité du processus $R(t)$ qui est convergente pour tout t au moins dans le disque $|z| < 1$

$$Q(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(z; t)$$

Notons par $h(s) = E(e^{-sw})$ la transformée de Laplace-Stieltjes de la f.r. $H(x)$

Théorème 5. Si

$$(i) \quad h_1 = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx < \infty \quad (4)$$

$$(ii) \quad \rho = \frac{\lambda h_1 (q_{12} + q_{12}')}{E_1 q_{21} + E_2 q_{12}} < 1 \quad (5)$$

alors $R(t)$ admet une distribution ergodique de probabilité qui est stationnaire.

Dans ce cas les limites

$$q_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P(R(t) = m) \quad (6)$$

existent et la z -transformée de cette distribution est donnée par la formule

$$Q(z) = (1-\rho) \frac{1-z}{f(z)-z} \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_z^1 \frac{1-f(y)}{f(y)-y} dy \right] \quad (7)$$

avec

$$f(y) = \frac{q_{12}h(s_2) [q_{21}+g_2(z, s_1)] - h(s_1)g_2(z, s_1) [q_{12}+g_1(z, s_2)]}{q_{12}q_{21} - g_1(z, s_1)g_2(z, s_2)} \quad (8)$$

$$g_i(z, s_i) = E_i s_i - q_{12} + \lambda - \lambda z, \quad i=1,2 \quad (9)$$

$$s_1 = s_1(z) = \frac{a(\lambda - \lambda z) + \sqrt{a^2(x) - 4E_1 E_2 x(x + q_{12} + q_{21})}}{2E_1 E_2} \quad (10)$$

$$s_2 = s_2(z) = \frac{a(\lambda - \lambda z) - \sqrt{a^2(x) - 4E_1 E_2 x(x + q_{12} + q_{21})}}{2E_1 E_2} \quad (11)$$

$$a(x) = E_1(q_{21} + x) + E_2(q_{12} + x) \quad (12) \quad \blacksquare$$

Notons que si $E_1 = E_2 = 1$ alors $f(z) = h(\lambda - \lambda z)$ et nous retrouvons la formule de Pollaczek-Khintchine pour les systèmes avec rappels [5]. Le théorème permet d'obtenir tous les moments désirés. En particulier la formule de Pollaczek-Khintchine pour le moment d'ordre un :

Corollaire. Le nombre moyen de clients en "orbite" vaut :

$$M_1 = \frac{dQ(z)}{dz} \Big|_{z=1} = \frac{\lambda}{v} \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{f''(1)}{2(1-\rho)} \quad (14) \quad \blacksquare$$

Si $E_1 = E_2 = 1$ alors $f''(1) = \lambda^2 \int_0^\infty x^2 dH(x)$ ce qui est conforme au résultat connu [4]. Des formules analogues peuvent être obtenues pour les moments d'ordre supérieur.

PREUVE DU THEOREME 4. Formulons d'abord le lemme suivant :

Lemme 1. Si $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} P(E(t+h)=j / E(t)=i) = q_{ij} > 0$ alors le processus $E(t)$ est ergodique.

Dans ce cas les probabilités ergodiques stationnaires (3) sont solutions du système d'équations

$$p_i \sum_{j=1}^n q_{ij}(1-\delta_{ij}) = \sum_{j=1}^n p_j q_{ji}(1-\delta_{ij}) \quad (15)$$

En vertu de (1) le processus $\mathbf{E}(t)$ est transitif et l'affirmation du lemme résulte du théorème général d'ergodicité pour les processus homogènes de Markov.

Le processus $X(t)$ est un processus régénératif [7]. On montre que si les conditions (1)-(3) sont vérifiées alors l'espérance mathématique de la v.a. $X_n = d_n - d_{n-1}$ (où d_n est la date de la n-ième régénération) est finie ; l'affirmation du théorème 4 est alors une conséquence du théorème de Smith [7, 11]

PREUVE DU THEOREME 5.

En vertu du lemme 1, les limites (3) existent et valent :

$$p_i = \frac{q_{ji}}{q_{ij} + q_{ji}} \quad (17)$$

Soit

$$p_0(m;t) = P(S(t)=0, R(t)=m) \quad (18)$$

$$p_i(m,x;t) = P(S(t)=1, E(t)=i, R(t)=m; f(t) < x) \quad (19)$$

$$m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2$$

Lemme 2. Si $\rho < 1$ alors les probabilités stationnaires

$$p_0(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(m;t) \quad (20)$$

$$p_i(m,x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(m,x;t) \quad (21)$$

existent et sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires :

$$(\lambda + \nu m) p_0(m) = \frac{dp_1(m,0)}{dx} + \frac{dp_2(m,0)}{dx} \quad (22)$$

$$(\lambda + q_{12}) p_1(m, x) = E_1 \left(\frac{dp_1(m, x)}{dx} - \frac{dp_1(m, 0)}{dx} \right) + \lambda p_0(m) H(x) + \\ + \nu(m+1) p_0(m+1) H(x) + \lambda(1 - \delta_{0m}) p_1(m-1, x) + q_{21} p_2(m, x) \quad (23)$$

$$(\lambda + q_{21}) p_2(m, x) = E_2 \left(\frac{dp_2(m, x)}{dx} - \frac{dp_2(m, 0)}{dx} \right) + q_{12} p_1(m, x) + \\ + \lambda(1 - \delta_{0m}) p_2(m-1, x) \quad (24) \quad \blacksquare$$

L'ergodicité résulte du théorème 4. Si $\rho > 1$ alors la distribution (20)-(21) est singulière.

Soient les fonctions génératrices partielles :

$$Q_0(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(z^{R(t)} / E(T)=0, S(t)=0) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m p_0(m)$$

$$Q_i(z, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(z^{R(t)} / E(t)=i, S(t)=1, f(t) < x)$$

Introduisons d'autre part les transformées de Laplace

$$r_i(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} Q_i(z, x) dx$$

En appliquant ces transformées au système d'équations (22)-(24) nous obtenons le système suivant :

$$\lambda Q_0(z) + \nu z \frac{dQ_0(z)}{dz} = \frac{\partial Q_1(z, 0)}{\partial x} + \frac{\partial Q_2(z, 0)}{\partial x} \quad (25)$$

$$q_1(z, s) r_1(z, s) + q_{21} r_2(z, s) = \frac{1}{s} \left[E_1 \frac{\partial Q_1(z, 0)}{\partial x} - \right. \\ \left. - (\lambda Q_0(z) + \frac{dQ_0(z)}{dz}) h(s) \right] \quad (26)$$

$$g_2(z,s)r_2(z,s)+q_{12}g_1(z,s)=\frac{E_2}{s} \frac{\partial Q_2(z,0)}{\partial x} \quad (27)$$

où $g_i(z,s)=E_i s^{-q_{ij}} - \lambda + \lambda z \quad (i \neq j)$

Le déterminant du système engendré par les équations (26) et (27) est de la forme

$$d(z,s) = (E_1 s^{-q_{12}} + \lambda - \lambda z) (E_2 s^{-q_{21}} + \lambda - \lambda z) - q_{12}q_{21}$$

Il est aisé de voir que ce trinôme du second degré admet deux racines qui sont toutes deux positives pour tout z appartenant au disque $|z| < 1$ et qui sont données par les relations (10)-(13).

Résolvant ce système d'équations nous obtenons

$$r_1(z,s) = \frac{1}{sd(z,s)} \left[(g_2(z,s) \frac{\partial Q_1(z,0)}{\partial x} E_1 - (\lambda Q_0(z) + v \frac{dQ_0(z)}{dz}) h(s) - q_{21} E_2 \frac{\partial Q_2(z,0)}{\partial x}) \right] \quad (28)$$

$$r_2(z,s) = \frac{1}{sd(z,s)} \left[g_1(z,s) E_2 \frac{\partial Q_2(z,0)}{\partial x} - q_{12} \frac{\partial Q_1(z,0)}{\partial x} E_1 - (\lambda Q_0(z) + v \frac{dQ_0(z)}{dz}) h(s) \right] \quad (29)$$

Puisque $d(z,s)$ s'annule pour $s=s_1$ et que $r_1(z,s)$ est une fonction analytique de s dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$ alors

$$E_1 g_2(z,s) \frac{\partial Q_1(z,0)}{\partial x} - q_{21} E_2 \frac{\partial Q_2(z,0)}{\partial x} = g_2(z,s) h(s_1) \left[\lambda Q_0(z) + v \frac{dQ_0(z)}{dz} \right]$$

De la même manière

$$q_{12} E_1 \frac{\partial Q_1(z,0)}{\partial x} - E_2 g_1(z,s) \frac{\partial Q_2(z,0)}{\partial x} = q_{12} h(s_2) \left[\lambda Q_0(z) + v \frac{dQ_0(z)}{dz} \right]$$

D'ici nous obtenons

$$\frac{\partial Q_i(z,0)}{\partial x} = \frac{1}{E_i} f_i(z) \left[\lambda Q_0(z) + v \frac{dQ_0(z)}{dz} \right] \quad (30)$$

où

$$f_1(z) = \frac{q_{12}q_{21}h(s_2) - h(s_1)g_1(z, s_2)g_2(z, s_1)}{q_{12}q_{21} - g_1(z, s_2)g_2(z, s_1)}$$

$$f_2(z) = \frac{q_{12}g_2(z, s_1) [h(s_2) - h(s_1)]}{q_{12}q_{21} - g_1(z, s_2)g_2(z, s_1)}$$

En tenant compte de ces expressions on obtient la solution de l'équation différentielle (12) sous la forme :

$$Q_0(z) = (1 - \rho) \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_z^1 \frac{1 - f(y)}{f(y) - y} dy \right] \quad (31)$$

où $f(y)$ est donnée par la relation (2).

En vertu de (30) et (31) les relations (28) et (29) deviennent:

$$r_1(z, s) = (1 - \rho) \frac{\lambda - \lambda z}{f(z) - z} \frac{g_2(z, s) [f_1(z) - h(s)] - q_{12}f_2(z)}{s [g_1(z, s)g_2(z, s) - q_{12}q_{21}]} \cdot \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_z^1 \frac{1 - f(y)}{f(y) - y} dy \right]$$

$$r_2(z, s) = (1 - \rho) \frac{\lambda - \lambda z}{f(z) - z} \frac{g_1(z, s)f_2(z) - q_{12} [f_1(z) - h(s)]}{s [g_1(z, s)g_2(z, s) - q_{12}q_{21}]} \cdot \exp \left[\frac{\lambda}{v} \int_z^1 \frac{1 - f(y)}{f(y) - y} dy \right]$$

La fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients en "orbite" s'obtient après quelques transformations à partir de la relation :

$$Q(z) = Q_0(z) + Q_1(z, \infty) + Q_2(z, \infty)$$

Le théorème est démontré.

REFERENCES

1. Aissani A. Queuing systems with unreliable single server. Vistnik Biel.Univ. Seria N°1, "Phys., Mat. , Mekh." BelNIITI N°756 Be D-83, pp. 1-131, Minsk 1983 (en russe)
2. Aissani A. Systèmes de files d'attente avec pannes. 1^{ère} Conf. Nat. "Stat. & Appl.", Constantine, 12-16 avril, 1986.
3. Aissani A. Sur une extension du problème de Gnedenko B.V. (à paraître).
4. Alexandrov A.M. A queuing system with repeated orders. Izv. Akad. Nauk SSSR , techn. kibern. , N°2 , pp. 86-89 , 1974 .
5. Choo Q.H. , Conolly B.W. New results in the theory of repeated orders queuing systems. J. of Appl. Prob. 16, N°3 , 1979.
6. Cohen W.J. Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. Philips telecomm. rev.18 , N°2, 1957.
7. Cox D.R. Renewall theory. Halsted press. New York , 1962.
8. Falin G.I. A single server system with repeated orders. Izv. Akad. Nauk SSSR , techn. kibern. , N°2 , 107-114, 1979 .
9. Falin G.I. On the waiting time process in a single-line queue with repeated calls, J. Appl. Prob. 23, N°1, 1986.
10. Falin G.I. On sufficient conditions for ergodicity of multichannel queuing systems with repeated calls, Adv. Appl. Prob. 16, 447-448, 1984.
11. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Introduction to queuing theory. Israel progr. for scient. transl., Jerusalem, 1968.
12. Hanscke T. Explicit formulas for the characteristics of the M/M/1/2 queue with repeated attempts, J. Appl. Prob. 24, 486-495, N°2, 1987.
13. Jonin G.L., Sedol J.J. Telephone systems with repeated calls, Proc. 6th Internat. Teletraffic Congr. Munich, 435/1-435/5, 1970.
14. Kleinrock L. Queuing systems, Vol. II, Wiley, New York, 1976.
15. Kornishev N. Single-server with repeated orders and preliminary service. Tekhn. Kibern. N°2, 83-86, 1977 (in russian).
16. Kulkarni V.G. Expected waiting times in a multiclass batch arrival retrial queue, J. Appl. Prob. 23, N°1, 1986.
17. Pujolle G. Les réseaux de données: réseaux locaux et réseaux

longues distances, Rapport MASI N°107, 1986.

18. Riordan Stochastic service systems ,1962.
19. Shkolny E.I. Estimation of loss probability for queuing system with repeated orders. Izv. Akad. Nauk SSSR , N°2 , pp. 95-99 , 1977.
20. Sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques, Monographie de L'AFCEP, Ed. Hommes et Techn., 1980.
21. Tropper C. Local Computer Network Technologies, Academic Press, New York , 1981.

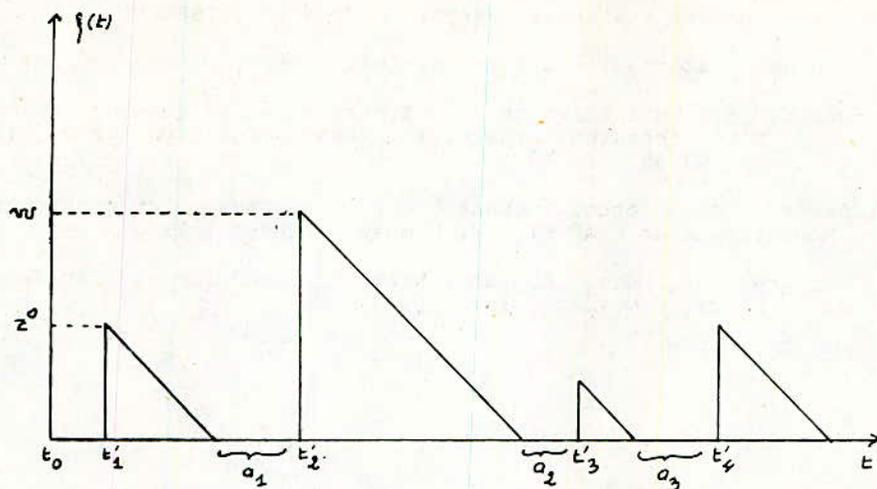


Figure 1. Variations de la composante $f(t)$. (Théorème 1).

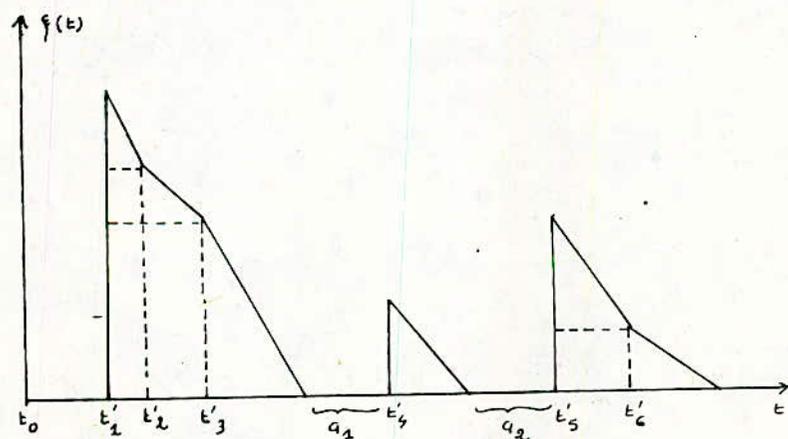


Figure 2. Variations de la composante $f(t)$ (Théorème 4).

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

RESUME DE THESE DE MAGISTER

Systeme d'acquisition et de traitement de données électrochimiques.

BEDDEK Malika M.A
FLAMANT Yves Professeur

Département d'électronique
Laboratoire traitement de signal

Date présumée de soutenance :

ملخص

لقد تم إنجاز جهاز تخزين و تحليل معطيات إلكتروكيميائية .
في هذا الملخص، نتعرض إلى الفكرة العامة و كيفية إنجاز و تجربة هذا الجهاز .
يمكننا هذا الجهاز من التحليلات العادية في مجالات ضغط و ذبذبة مبرمجة و كذلك قياس
السرعة و التركيز، في نفس الوقت، في مجرى سائل .
التقنية المستعملة توفر النبذ المصغر للضجيج أثناء قياس المقاومة التي يمكننا تحديد
قيمتها بإستعمال برنامج ألي خاص .

Résumé

Un système d'acquisition et de traitement de données électrochimiques a été développé. Son principe, sa mise en œuvre et sa vérification expérimentale sont présentés.

Il permet l'analyse d'une solution électrochimique, tant en statique qu'en dynamique, sur des gammes de tension et de fréquence programmables. La mesure simultanée de vitesse et de concentration dans un écoulement, peut également être effectuée.

La technique de démodulation synchrone, offrant une réjection optimale du bruit, a été introduite pour la mesure d'impédance dont les éléments peuvent être évalués grâce à un logiciel spécifique.

Abstract

A data acquisition and analysis system has been designed and developed to study the electrochemical data. This system is applicable to both static and dynamic analysis. Using this, we can measure the concentration and velocity of flow.

Both hardware and software necessary to optimal noise rejection have been incorporated into the system to study weak signals buried in noise. Specific software has also been developed to evaluate constituents of the impedance which has been measured.

Nomenclature

- A : aire de la microélectrode
A_n : amplitude de l'harmonique de rang n
C_d : capacité de double couche
C.E : contre électrode
C_i : concentration de l'espèce i au sein du fluide
D_i : coefficient de diffusion
dt : période d'échantillonnage
E : tension de polarisation
E° : tension normale du couple Redox étudié
E.R : électrode de référence
E.T : électrode de référence
F : nombre de Faraday
I_{li} : intensité limite pour l'espèce i
k : facteur de proportionnalité
l : longueur de l'électrode dans le sens de l'écoulement
N : nombre d'échantillons considérés sur la durée d'observation
n : nombre d'électrons en jeu dans la réaction
N_p : nombre d'échantillons par période
P : nombre de périodes
R : constante des gaz parfaits
S(t) : signal de sortie
T° : température
u : composante principale de la vitesse de l'écoulement
y : distance à la paroi
- δ_i : échelle de diffusion convective pour l'espèce i
φ_n : phase de l'harmonique de rang n
σ : variance
n_s : surtension de transfert de charge
ω : pulsation du signal
z : coefficient d'absorbance

indices

- d : phénomène de diffusion
e : entrée
o : forme oxydée
r : forme réduite
s : sortie
t : phénomène de transfert de charge
½ : potentiel de demi-vague

Les domaines d'application des analyses électrochimiques sont aussi nombreux que variés. Par ailleurs les grandeurs mises en jeu, courant et tension, se prêtent naturellement à une automatisation. Cette dernière peut permettre l'analyse, aussi bien en statique qu'en dynamique, des processus régissant la cinétique électrochimique.

En effet, la comparaison de la tension et du courant induit, constitue le moyen le plus puissant dont on dispose actuellement pour recueillir "in situ" des informations sur les phénomènes dont l'interface électrochimique est le siège [1]. Pendant fort longtemps, on a extrait certaines de ces informations à partir des courbes courant-tension stationnaires dites polarogrammes: c'est l'analyse statique.

Bien que très utile, cette méthode ne peut, dans le meilleur des cas, identifier que le plus lent des processus mis en jeu par le courant électrique [2]. Elle ne suffit pas à établir une description fine de l'homogénéité spatiale et temporelle des processus élémentaires se déroulant à l'interface. Une vaste gamme de méthodes non stationnaires sont, ou ont été utilisées, dans le but d'obtenir des informations supplémentaires: on arrive ainsi à une analyse dynamique.

Afin de faciliter ces deux types d'analyse, nous avons conçu un système d'acquisition et de traitement de données électrochimiques [3]. Celui-ci peut mener tant à la modélisation d'une cellule électrochimique qu'à des applications spécifiques dans divers domaines comme celui de la mécanique des fluides [4], de la médecine [5] ou encore de la pharmacie [6]. Nous avons ainsi étudié, à la demande du laboratoire de mécanique des fluides de Bab-Elzouar, l'application de cette méthode électrochimique à la mesure simultanée de vitesse et de concentration dans un écoulement.

1- Principe de la méthode électrochimique.

Il est fondé sur le phénomène du transfert de masse et (ou) de charges électriques au cours d'une réaction électrochimique locale.

Pour caractériser cette réaction, il suffit de repérer le potentiel de l'anode ou électrode de travail (micro-électrode de platine) non pas par rapport à la cathode (contre-électrode) mais par rapport à une troisième électrode, dite électrode de référence, dont le potentiel est indépendant de la composition de la solution et de l'intensité du courant circulant entre anode et cathode.

L'adjonction d'un excès d'électrolyte indifférent supprime l'effet de migration et le courant I est alors contrôlé par la convection du réactif (diffusion plus transport). Ce courant est lié à la tension E de polarisation par:

$$E = E^0 - \frac{RT^0}{nF} \left[\ln \frac{C_0}{C_1} + \ln \frac{I_0 - I}{I_1 - I} \right] + n_1(I) \quad (1)$$

Au point d'inflexion: $E_1 = \frac{I_0 + I_1}{2}$

La tension E_1 , dite tension de demi-vague, est caractéristique du système Red/Ox. Le rapport $a = I_0/I_1$ dépend, quant à lui, du rapport des concentrations.

Si une excitation sinusoïdale $X(t)$, de faible amplitude X_0 , est superposée à la tension continue, on observe une réponse sinusoïdale de même fréquence. Cette excitation crée une onde de concentration [7] qui peut être caractérisée par une mesure d'impédance.

1-1 Modèle de la cellule électrochimique.

En s'appuyant principalement sur des considérations expérimentales, la cellule électrochimique est souvent représentée [8] par le circuit de la figure 1.

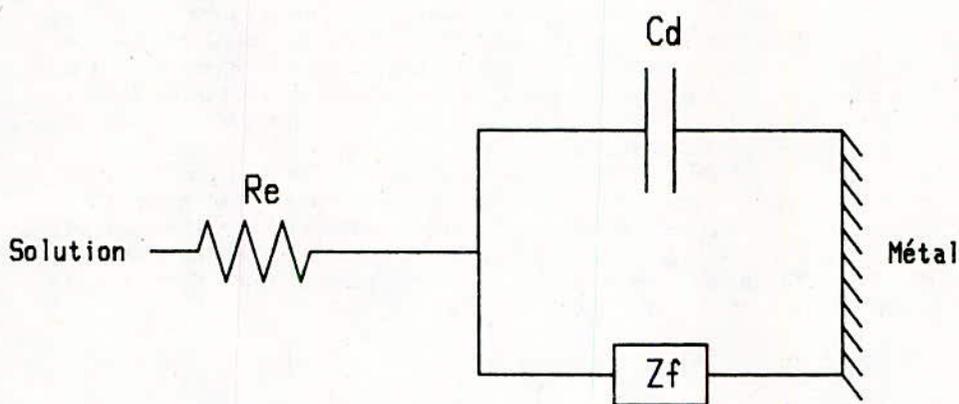


Fig.1: Modèle de l'impédance d'interface.

Re correspond à la résistance de l'électrolyte indifférent.

Cd, capacité de double couche, traduit l'effet capacitif qui dépend de la nature de l'électrode, du potentiel imposé et de la composition de la solution.

Zf est caractéristique du processus électrochimique. Elle est décrite par divers modèles [9]. Le plus utilisé est celui de Randles: un transport de masse par diffusion associé à un transfert d'électrons. Zf est alors constituée

d'une résistance pure Rt, dite de transfert, en série avec une impédance de diffusion Zd (impédance de Warburg):

$$Z_d = \frac{k}{\sqrt{j\omega}} \quad (2)$$

Une quantification de ces divers éléments permet ainsi d'évaluer l'importance des phénomènes ayant lieu à l'interface.

II- Mesure de l'impédance.

Les systèmes électrochimiques n'étant pas linéaires, nous avons été amenés à opter pour une technique de mesure mettant en jeu des signaux de très faible amplitude, technique qui joue un rôle privilégié dans l'analyse de ce type de système [9]. On sait alors, qu'en chaque point de la courbe représentant le comportement globalement non linéaire d'un système, son comportement linéaire peut être entièrement décrit par son impédance.

La détermination expérimentale de cette impédance pose des problèmes touchant à la fois à la régulation des conditions électrochimiques (systèmes non-biunivoques) et à la mesure proprement dite. Celle-ci peut être effectuée à partir de la réponse transitoire ou permanente du système à un signal d'excitation. On préfère cependant réserver les méthodes transitoires à l'étude de processus évoluant lentement mais pouvant tout de même être considérés comme quasi-invariants pendant des laps de temps relativement courts [10].

Dans notre cas, nous avons traité de l'analyse harmonique. Du fait que cette analyse est réalisée à l'aide de signaux de faible amplitude et que les capteurs utilisés engendrent en général un rapport signal sur bruit défavorable [11], la démodulation synchrone se présente comme la solution optimale [12].

II-1 La démodulation synchrone.

Son principe (Fig.2) revient à mesurer successivement les composantes en phase et en quadrature de la réponse S(t) de la cellule au signal d'analyse en les comparant à ce dernier. Cette comparaison revient à une simple démodulation:

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \cdot \sin(\omega t) dt \quad (3)$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \cdot \cos(\omega t) dt \quad (4)$$

$$\text{où } S(t) = X_0 K(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) + A_m \sin(\omega t + \phi_m) + b(t) \quad (5)$$

$K(\omega) \exp(j\phi(\omega))$ représente la fonction de transfert à étudier et $b(t)$ un bruit additionnel propre à la cellule.

Les corrélations (3) et (4), effectuées sur une période T_0 , permettent d'éliminer les harmoniques éventuelles. La réjection totale du bruit nécessite, quant à elle, un temps d'intégration infini. Ceci étant impossible en pratique, on montre [12] que la démodulation introduit une amélioration du rapport signal sur bruit proportionnelle au temps d'intégration T .

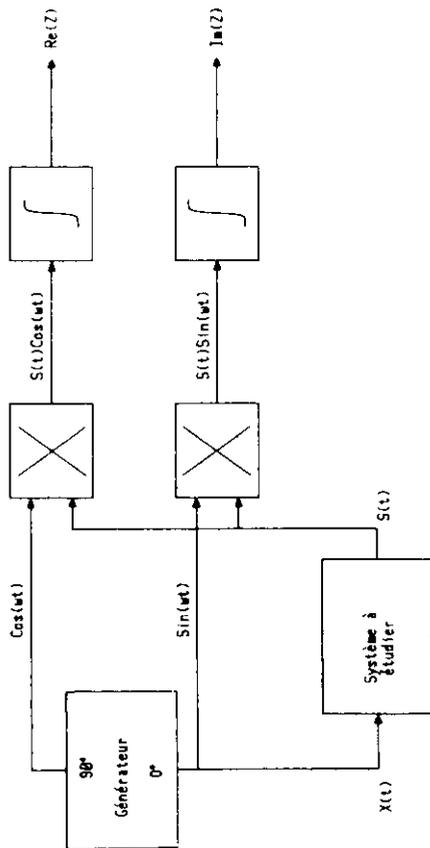


Fig.2: Principe de la démodulation synchrone.

Notre système étant numérique, cette intégration se ramène à une simple moyenne linéaire. Nous avons pu démontrer que le nombre optimal d'échantillons à considérer, pour que la somme discrète converge vers la solution recherchée, est de trois dans le cas d'un signal non bruité.

Ce nombre s'avère nettement insuffisant pour un rapport signal sur bruit défavorable. L'augmentation de ce dernier, à la sortie du corrélateur, est proportionnelle au nombre N d'échantillons pris en compte sur toute la durée d'observation [13]:

$$\sigma_s^2 = \frac{\sigma_e^2}{N} \quad (6)$$

$$\text{avec } N = N_p \cdot P$$

La moyenne est en effet prise sur l'ensemble des deux signaux (sinusoïdal et bruit), l'un servant de fenêtre d'observation pour l'autre. La corrélation offre ainsi l'énorme avantage de séparer les phénomènes déterministes des phénomènes aléatoires.

Cette corrélation, effectuée à l'aide d'un bruit simulé, avec N_p et P variables, nous a permis de constater que cette amélioration est aussi bien fonction de N_p que de P (Fig.3).

Par ailleurs, la durée de mesure dépend de P alors que N_p est limité par la rapidité des convertisseurs utilisés; nous avons alors opté pour une loi d'échantillonnage variable suivant la fréquence de travail. Son principe a consisté, pour un nombre total d'échantillons N donné, à limiter N_p en haute fréquence et P en basse fréquence.

II-2 La détection synchrone.

C'est une simplification technologique de la démodulation synchrone [12]: au lieu de multiplier $S(t)$ par $\sin(\omega t)$, on le multiplie par un signal carré synchrone $R(t)$. La facilité de mise en oeuvre est évidente puisque cette fonction ne peut prendre que deux états: 1 ou -1, ce qui revient à de simples additions.

Par ailleurs, si l'on s'assure que le système considéré ne présente pas d'harmoniques à la sortie, on pourra dire que le détecteur synchrone donne le même résultat que le démodulateur synchrone, au gain près. Mais, bien qu'attrayante, cette possibilité ne peut être mise en oeuvre que dans un domaine de fréquences limité. En effet, la reconstitution du signal carré, à partir d'une succession de 1 et de -1, nécessite une fréquence d'échantillonnage minimale [14].

Le compromis adopté, dans notre cas, a consisté à utiliser au dessus de 500Hz, des fonctions trigonométriques tabulées; ce que nous avons pu nous permettre étant donné que l'occupation mémoire entraînée n'est pas prohibitive (quatre échantillons par période et par fréquence). En basse fréquence, nous avons utilisé $R(t)$ comme signal de démodulation à raison de 32 échantillons par période. Ce qui revient à tenir compte des 15 premières harmoniques pour assurer une reconstitution acceptable [14] du signal carré.

III-Structure du système réalisé.

A partir des considérations précédentes sur le type d'analyse, la technique de mesure, la plage de fréquence ainsi que sur les conditions électrochimiques; nous avons dégagé le synoptique général (Fig.4).

Conçu autour d'une carte d'évaluation, ce système a nécessité la réalisation de deux modules spécifiques: l'un pour l'adaptation à la cellule électrochimique, l'autre pour la génération des signaux d'attaque et le prétraitement.

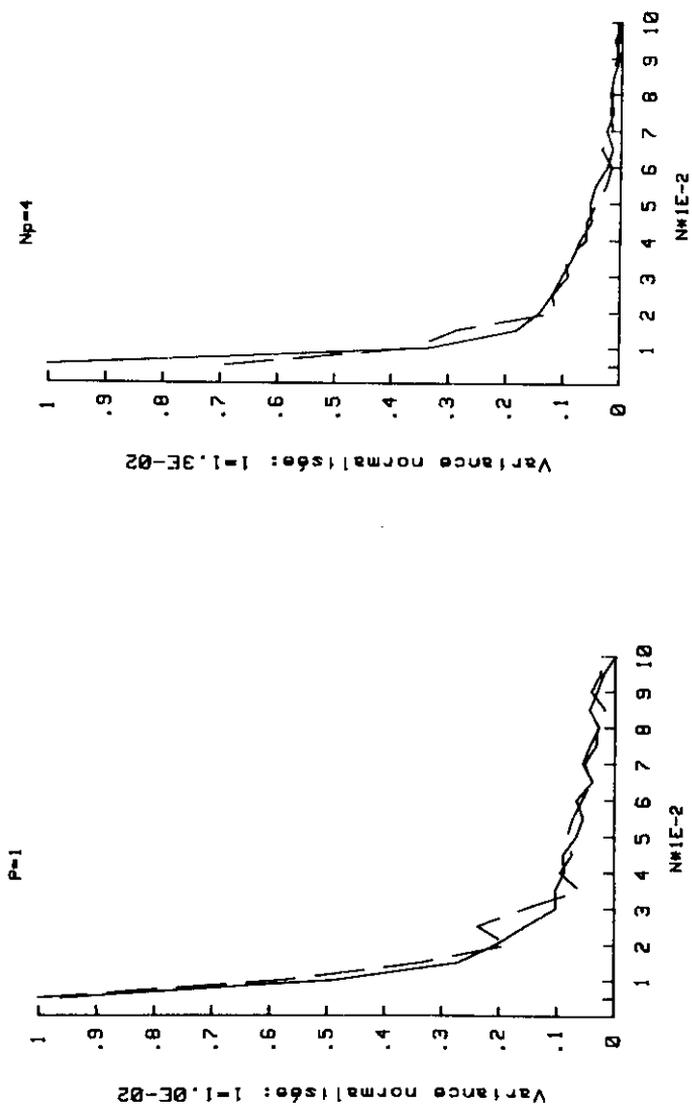


Fig.3: Amélioration, en fonction de $N=P \times N_p$, de la variance du bruit dans le cas de l'estimation de $\text{Re}(Z)$ (---) et de $\text{Im}(Z)$ (—).

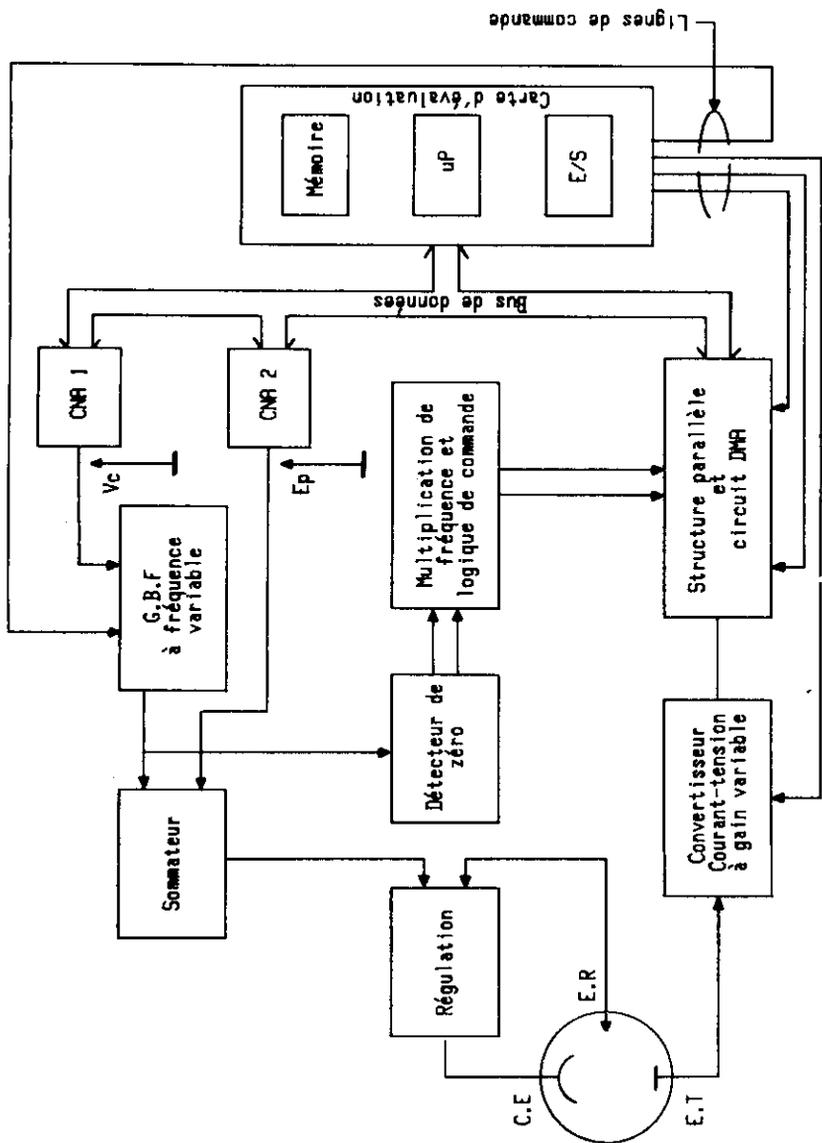


Fig.4: Synoptique général du système.

IV- Algorithme de traitement et résultats.

Le développement de logiciels de commande et de traitement, adaptés à la partie matérielle décrite précédemment, a mené aux applications envisagées. Celles-ci concernent le relevé et l'analyse des caractéristiques statique et dynamique d'une cellule électrochimique ainsi que la mesure simultanée de vitesse et de concentration.

Les essais ont été réalisés sur le couple Ferri-Ferrocyanure de potassium en présence de chlorure de potassium en excès. Les concentrations sont connues avec exactitude et la solution est agitée afin de pouvoir considérer que le processus est contrôlé par la diffusion.

IV-1 Analyse statique.

Le relevé des courbes courant-tension, à l'aide du système développé, a montré au niveau des paliers (Fig.5) des fluctuations parasites propres à la cellule électrochimique.

Cette constatation a imposé un opérateur de lissage avant la détermination de toute valeur particulière. L'étude des diverses méthodes de lissage a mené au choix d'un lissage local [16] pour des raisons de simplicité, de mise en oeuvre et d'occupation mémoire réduite. Un lissage sur cinq points (Fig.6) a permis d'obtenir des résultats satisfaisants.

Les points particuliers de ce polarogramme (Illo. Ilr. E4) correspondent aux zéros et au maximum de la dérivée. Son calcul repose sur la méthode de Taylor. Dans notre cas, l'approximation d'ordre deux (7) s'est avérée suffisante (Fig 6).

$$S'(x) = \frac{S(n+1) - S(n-1)}{2} \quad (7)$$

La comparaison de la valeur théorique de E4 à celle donnée par le système, a montré une erreur relative maximale de 3%.

IV-2 Analyse dynamique.

L'application de la démodulation synchrone a consisté à implémenter (8) et (9) où M et M' sont deux signaux orthogonaux.

$$\text{Re}(Y(w)) = \frac{G}{R^2 + X} \int M(dt, w) \cdot S(dt, w) \quad (8)$$

$$\text{Im}(Y(w)) = \frac{G}{R^2 + X} \int M'(dt, w) \cdot S(dt, w) \quad (9)$$

Suivant la plage de fréquence, on a:

$$(M(t), G) = (R(t), 2/\pi) \quad \text{et} \quad 0.01 \leq f \leq 500\text{Hz}$$

$$(M(t), G) = (\sin(\omega t), 0.5) \quad \text{et} \quad 500 \leq f \leq 10\text{KHz}$$

L'impédance est obtenue en posant:

$$Z(w) = \frac{1}{Y(w)} = \frac{\text{Re}(Y(w)) - j \text{Im}(Y(w))}{\sqrt{\text{Re}^2(Y(w)) + \text{Im}^2(Y(w))}} \quad (10)$$

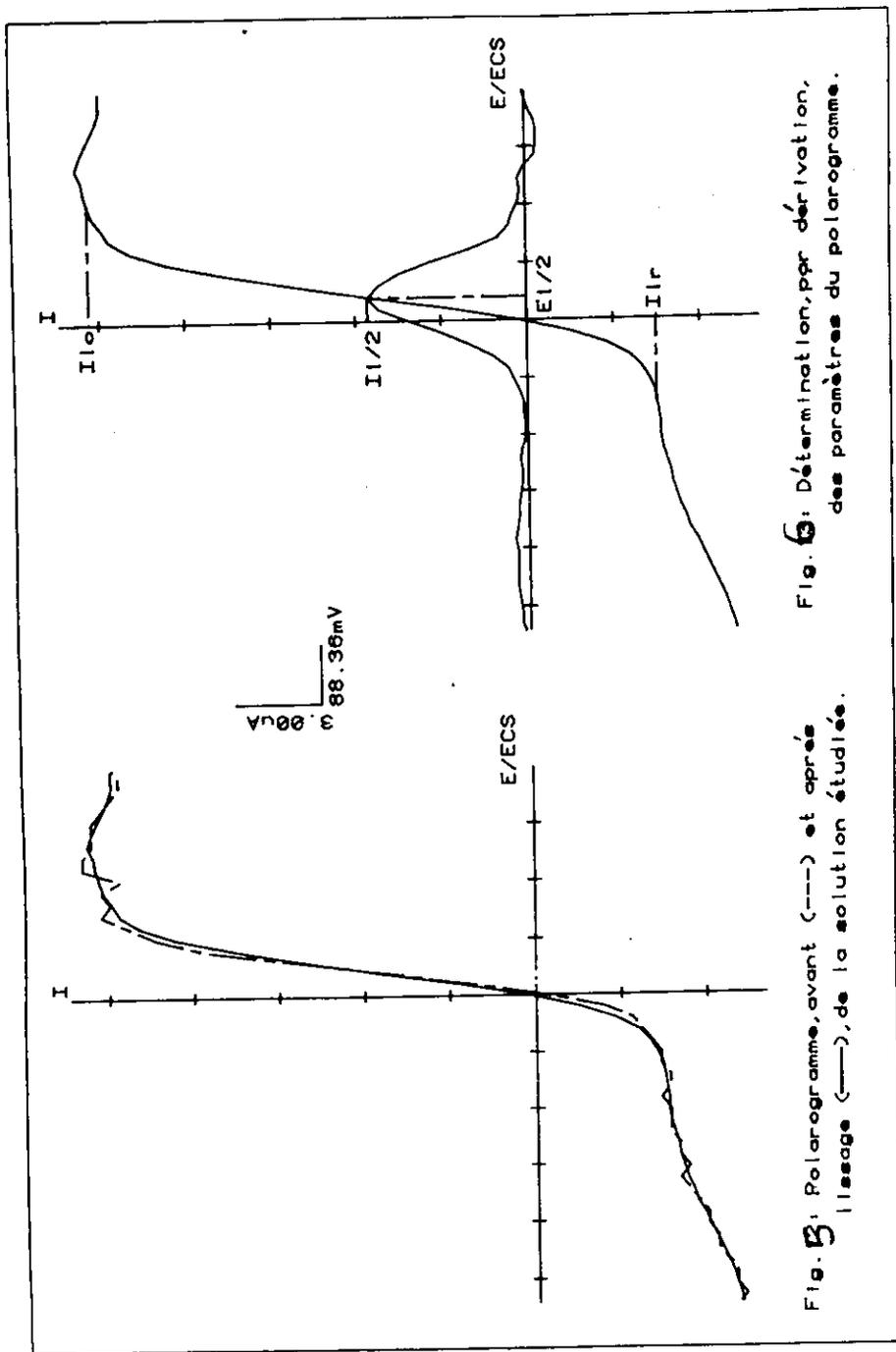


Fig. 6: Détermination, par dérivation, des paramètres du polarogramme.

Fig. 5: Polarogramme, avant (---) et après nettoyage de la solution étudiée.

IV-2-1 Essais et résultats.

Afin de pouvoir évaluer l'erreur introduite par le système et vérifier l'algorithme de traitement implémenté, nous avons utilisé une cellule fictive conforme au modèle donné par la figure 1.avec $Z_f=0$.

Le problème de linéarité ne se posant pas dans ce cas particulier, nous avons pu imposer un rapport signal sur bruit élevé et limiter ainsi N à 4.

L'erreur relative, déduite de la comparaison de nos mesures à celles de A et B obtenues par ailleurs, a été estimée pour les différentes fréquences de travail (Fig.7a). Elle est inférieure à 3%.

La même cellule a servi au test de l'adéquation de la méthode exposée à la mesure d'impédance à partir d'un signal noyé dans du bruit. Pour ce faire, au signal de réponse est ajouté un bruit, dérivé d'une source extérieure, de variance telle que le rapport signal sur bruit soit inférieur à 1. Les courbes d'erreur relative montrent alors, pour un nombre d'échantillons $N=500$, une valeur inférieure à 1% (Fig.7b).

IV-2-2 Mesure de l'impédance électrochimique du couple étudié.

Le système étudié n'étant pas linéaire, nous avons eu recours à une opération de quasi-linéarisation [17] qui revient à définir pour chaque point de polarisation un domaine de linéarité où s'applique le principe de superposition.

Nous avons fixé la tension de polarisation à 24 afin de mesurer une impédance dépendant aussi bien de la réaction cinétique qu- de la diffusion [15]. Autour de ce point, les mesures en statique nous ont conduit à un domaine de linéarité tel que $X_0=25$ mV.

La durée d'observation a été limitée à $N=100$, grâce à une analyse statistique du spectre du signal de sortie sans excitation. Cette analyse a montré en effet une variance de bruit bornée par 0.05.

Le tracé des diagrammes de Nyquist et de Bode (Fig.8) a permis de constater que les allures obtenues correspondent bien à celles de l'impédance d'une solution de couche limite d'épaisseur finie [18].

IV-2-3 Algorithme d'identification des éléments de la cellule.

Pour permettre une interprétation des diagrammes obtenus, nous avons développé un programme approprié à des fins d'analyse d'impédance. Cette analyse consiste à quantifier l'influence de chaque constituant d'une cellule électrochimique donnée.

Nous avons pu démontrer, à partir des modèles mathématiques de Zd, que cette dernière pouvait être modélisée par une résistance R_p en parallèle avec une capacité C_p pour une couche de diffusion d'épaisseur finie ou infinie. Dans ce dernier cas, R_p se réduit à un circuit ouvert.

L'algorithme (Fig.9) a donc été basé sur le calcul des valeurs des constituants d'un circuit par extraction de bipôles [19]. Ces bipôles sont des cellules RC, ce qui revient au niveau du diagramme $Z=f(\omega)$ à une combinaison de demi-cercles ou de demi-cercles et de droites. En utilisant cette propriété, on peut ramener le principe analytique de l'extraction d'un bipôle à celui de la détermination d'intersections graphiques de courbes avec des axes [20]. Pour cela, il a fallu procéder à une extrapolation des points calculés qui a conduit à ajuster la courbe $Z=f(\omega)$ par le tracé d'une parabole dans la région proche de l'axe considéré. Cette approximation a consisté en la détermination de coefficients de polynômes du deuxième ordre par la méthode [14] des moindres carrés.

----- : (a)
 : (b)

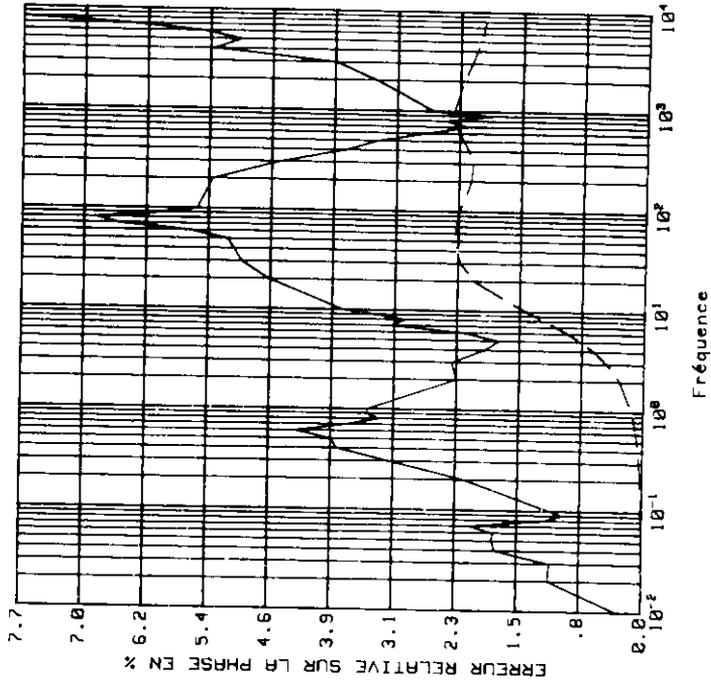
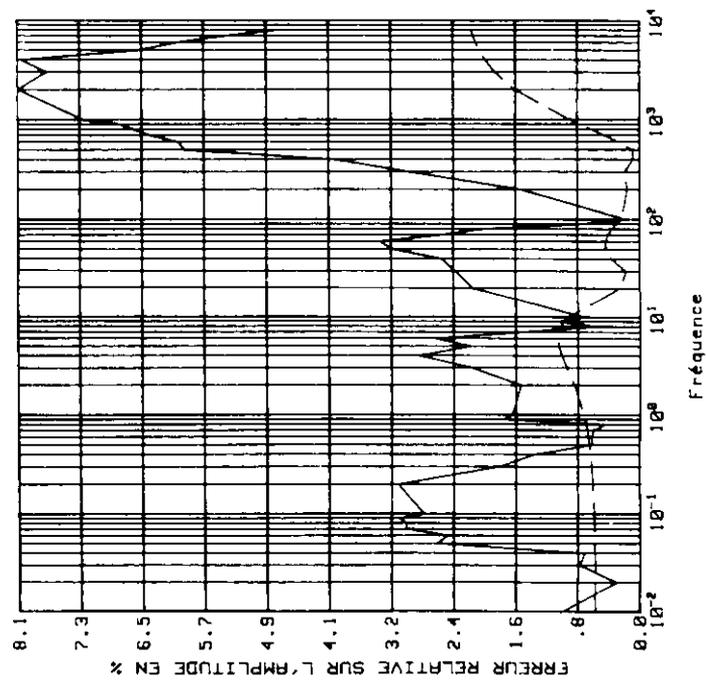


Fig. 17: Erreur relative en amplitude et en phase pour un signal non bruité (a) ou bruité (b).

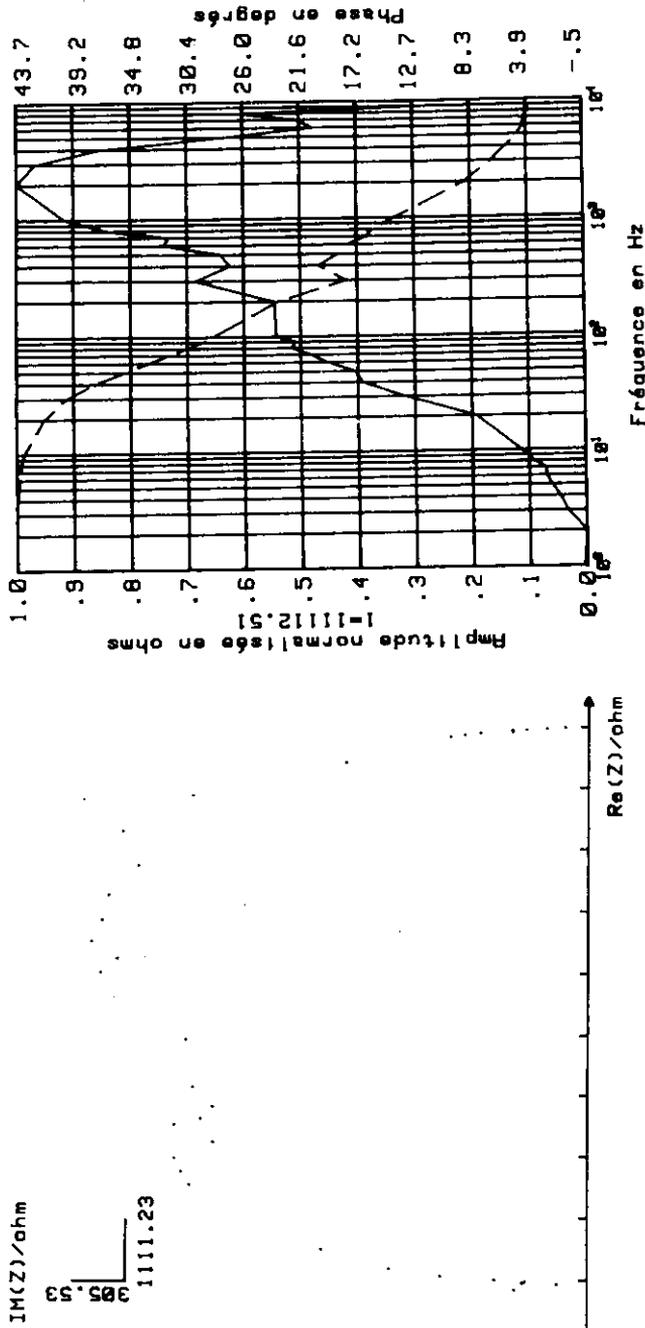


Fig. 18: Diagrammes d'impédance de la solution étudiée.

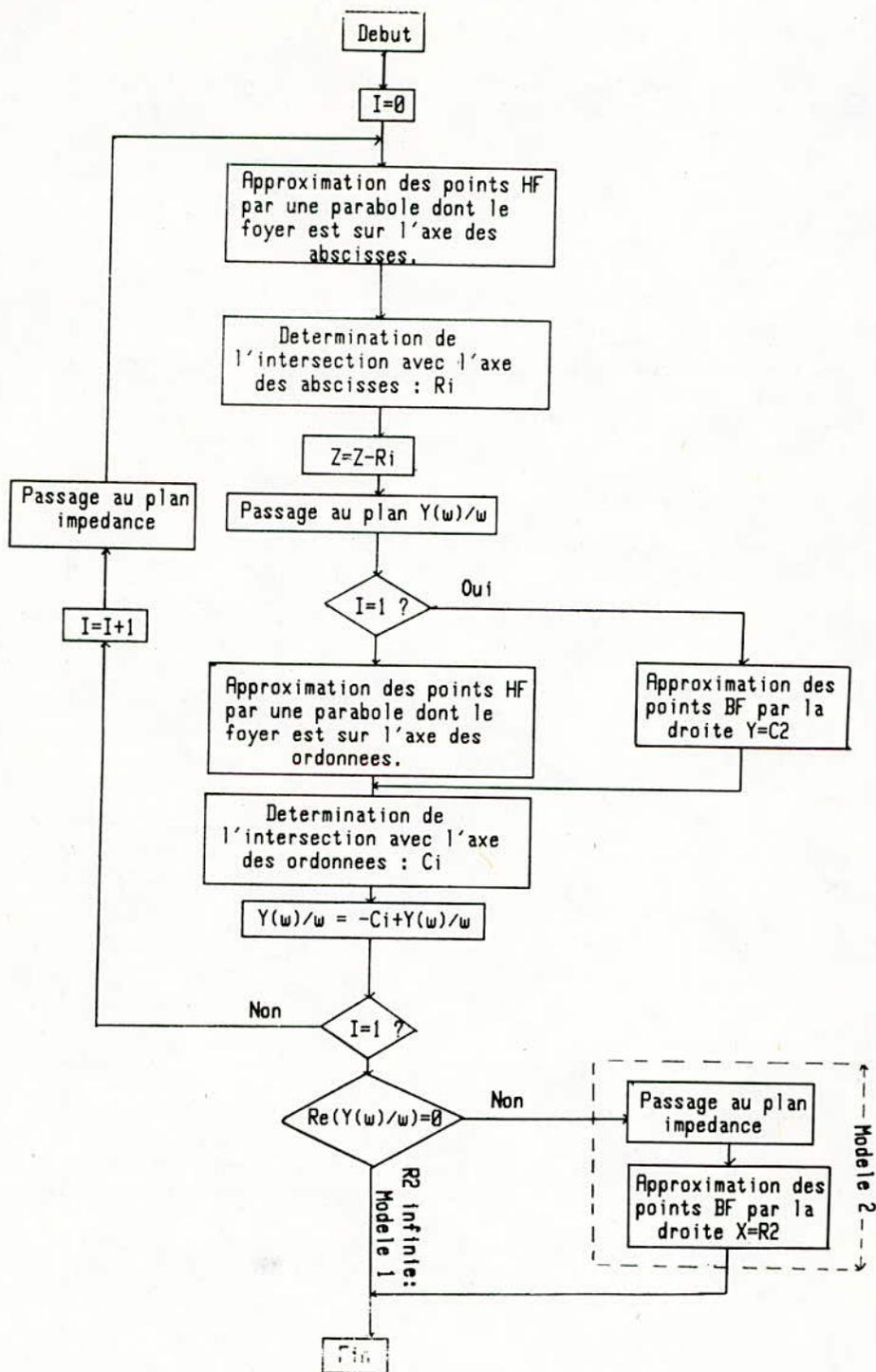


Fig. 9: Analyse d'une impédance $Z=R_1+(C_1//R_2+C_2)$

Le mise en oeuvre de cet algorithme, sur des échantillons recueillis à partir de la cellule précédente, a permis d'établir le tableau ci-dessous qui fait ressortir une erreur relative inférieure à 7%.

Elément	Valeur de référence	Valeur mesurée
R ₀	1000 Ω	1000.023 Ω
C ₁	21 nF	19.98 nF
R ₁	50000 Ω	52423.68 Ω
C ₂	217 nF	225 nF
R ₂	5000 Ω	4665.29 Ω

Dans le cas de la solution test les résultats obtenus semblent également corrects, C_d et R_e étant effectivement faibles devant C_p et R_p.

La valeur de C_d est pourtant plus importante que celle prévue [21], ce qui peut être dû à l'empoisonnement de l'électrode (augmentation de la surface active par dépôt de substances organiques).

IV-2-4 Mesure simultanée de vitesse et de concentration.

Nous sommes partis des résultats d'une étude [21] montrant la possibilité d'accéder séparément et simultanément à la vitesse et à la concentration dans un écoulement, en utilisant la méthode électrochimique.

En effet, il a été démontré [21] que le gradient pariétal de vitesse S s'écrit:

$$S = \frac{\delta u}{\delta y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{2a} \frac{(110)^3}{Do^2 - (0.807nAF)^2 (Co)^2} \quad (11)$$

Par ailleurs:

$$Co = \frac{RT}{nF^2} \frac{(1+a)}{2a} (2\omega Do)^{-1/2} Re(Z\omega) \quad (12)$$

La fréquence optimale de mesure est obtenue en se fixant des conditions sur la valeur minimale de concentration à mesurer ainsi que sur la vitesse maximale admissible de ses fluctuations. Ces limitations permettent de s'assurer que l'onde de concentration pénètre à peine la couche de diffusion et ne modifie pas la répartition de concentration dans cette zone.

On obtient:

$$f = \frac{3}{812\pi} \frac{FA}{nRT} \frac{Do}{Cd} \frac{Co_{min}}{Co_{max}} \quad (13)$$

Le couple oxydo-réducteur utilisé comme traceur étant connu, on dispose des valeurs de n et Do.

C_d pouvant être obtenue grâce à la phase d'analyse de l'impédance, on détermine ainsi la fréquence optimale de travail.

A cette fréquence et au point de polarisation E₄, la mesure de la concentration est réalisée par le biais de (12), la constante a étant déterminée à partir de l'étude statique de la solution en mouvement et Re(Z ω) par (8), (9) et (10). Nous avons estimé l'erreur relative sur cette mesure à 12.3%.

L'évaluation du gradient pariétal S découle ensuite de (11), de la connaissance de Co et de celle de 110 (coefficient de diffusion).

La mesure simultanée de vitesse et de concentration est donc effectivement possible à partir de celle de l'impédance de diffusion de la solution considérée, au potentiel de demi-vague et à une fréquence f bien déterminée.

Conclusion

Un système d'acquisition, de traitement et d'aide à l'interprétation de données électrochimiques a été décrit.

Sa conception a été orientée vers la recherche d'un maximum de souplesse d'utilisation. Une automatisation poussée permet ainsi de faire, après initialisation, des mesures soit en statique soit en dynamique sans aucune intervention de l'opérateur.

Une interface d'adaptation aux conditions électrochimiques a été réalisée en tenant compte de contraintes spécifiques portant essentiellement sur le caractère non-biunivoque des courbes courant-tension.

L'analyse dynamique a été rendue possible par la conception d'un module réalisant la génération d'un signal d'excitation de fréquence variable (10 mHz à 10KHz) et l'acquisition de la réponse de la cellule suivant une loi d'échantillonnage dépendant elle-même de la plage de fréquence à explorer.

Cette partie matérielle a évidemment nécessité le développement de logiciels adaptés à la technique de mesure choisie, dont un programme de calcul en virgule flottante.

L'utilisation d'un logiciel spécifique autorise par ailleurs l'analyse de l'impédance mesurée, de manière à déterminer l'influence relative des différents processus qui interviennent au niveau de l'interface électrochimique.

Nous avons également traité un aspect particulier lié au transport de matière: la mesure de vitesse et de concentration. A l'encreusement près de l'électrode (problème non négligeable), les résultats obtenus peuvent être considérés comme positifs. Le système constitue alors une chaîne fidèle qui permet d'étudier les propriétés diffusionnelles des écoulements mais au prix d'un nettoyage fréquent de l'électrode, ce qui restreint son application au laboratoire.

Une extension au domaine industriel (mesures en ligne sur des chaînes de fabrication de boissons par exemple) peut être envisagée à long terme avec le développement de capteurs sélectifs et jetables dès la manifestation d'une dérive ou d'une perte de sensibilité.

Une autre extension plus générale réside dans la possibilité d'une exploitation plus poussée des mesures grâce à l'utilisation d'un système évolué. Dans cette optique, une liaison RS232 a été adjointe. L'analyse du polarogramme et (ou) de la fonction de transfert ouvre en effet de vastes perspectives spécifiques à chaque domaine d'application. Nous citerons par exemple l'évaluation de paramètres tels que les constantes cinétiques, les coefficients de diffusion ou encore le pH de la solution considérée [22].

Bibliographie

- [1] D.R. CROW et J.V. WESTWOOD
Polarographie
Librairie Armand Colin, Paris 1972
- [2] H. MATSUDA et P. DELAHAY
"Double layer structure and relaxation methods for fast electrode processes"
J. Phys. Chem. (USA) 64 1960
- [3] M. BEDDEK, Y. FLAMANT, R. SADOUN et H. BEGORRE
"Système d'acquisition et de traitement de données électrochimiques"
J.T.E.A Tunis 86
- [4] D. CAMPERGUE
"Contribution à l'étude du ruissellement plan par la méthode polarographique"
Thèse de 3e cycle, Alger 1972

- [5] A. CAPRANI
 "Investigation, by electrohydrodynamic admittance measurements, of the influence of cell morphology, wall potential and hematocrit on the flow of suspensions of red blood cells in vicinity of the flow"
 Bioelectrochemistry and bioenergetics. Vol 6. 1979
- [6] J. C. VINE, J. M. KAUFMANN, J. BRAUN et C. J. PATRIARCHE
 "Caractéristiques électrochimiques d'un nouvel anti-inflammatoire non-stéroïdien: le Piroxicam"
 Analisis. Vol 13. 1985
- [7] K. J. VETTER
 Electrochemical kinetics.
 Academic Press. New-York 1967
- [8] D. SHUHMANN
 "Sur l'impédance de diffusion en basse fréquence"
 C. R. Acad. Sc. Paris (t. 262) 1966
- [9] C. GABRIELLI et M. KEDDAM
 "Progrès récents dans la mesure des impédances électrochimiques en régime sinusoïdal"
 Electrochimica Acta (Vol. 19) 1974
- [10] I. A. TALAMON, C. DESLOUIS, C. GABRIELLI et J. C. LESTRADE
 "Etude et réalisation d'un dispositif d'enregistrement numérique de la réponse transitoire d'une interface électrode-électrolyte"
 J. Chim. Phys. (69) 1972
- [11] G. C. BARKER
 "Noise connected with electrode processes"
 Electroanal. Chem. (t. 21) 1969
- [12] J. MAX
 Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques
 T1 et T2. Ed. Masson 1984
- [13] F. DE COULON
 Théorie et traitement de signal
 Ed. Georgi Lausanne 1983
- [14] A. REVERCHON et M. DUCAMP
 Mathématiques sur ordinateur
 T1: Analyse
 Ed. Eyrolles Paris 1986
- [15] D. LELIEVRE et V. PLICHON
 "Mesure de l'impédance faradique pour l'étude de mécanismes E.C"
 Electrochimica Acta (Vol. 23) 1978
- [16] H. MINEUR
 Techniques de calcul numérique
 Ed. Dunod 1966
- [17] J. W. WHITE
 Proc. of the 6th annual Princeton conference on information sciences and systems
 1972
- [18] M. SLUYTERS-REHBACH et J. H. SLUYTERS
 Electroanalytical chemistry. Vol. 4
 A. J. BARD Ed. Marcel Dekker New-York 1970
- [19] J. COX
 Les filtres électriques
 Ed. Dunod 1983
- [20] R. DE LEVIE, J. W. THOMAS et K. M. ABBEY
 "Membrane admittance measurements under computer control"
 J. Electroanal. Chem. 62 1975

[21] H.BEGORRE et M.LEBOUCHE

"Mesure simultanée de la concentration et du gradient pariétal de vitesse dans un écoulement"

Int. J. Heat Mass Transfer Vol.23 1983

[22] C.MADEC, F.QUENTEL, G.COURTOT-COUCPEZ et M.DORE

"Principales méthodes analytiques applicables au dosage de traces de chlore, de chlorite et de chlorate lors du traitement des eaux douces par le dioxyde de chlore."

Analisis Vol.15 N°2 1987

Achevé d'imprimer sur les presses de

**L'OFFICE DES PUBLICATIONS
UNIVERSITAIRES**

1, Place Centrale - Ben-Aknoun - ALGER

